Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Contaduría y Administración

MR

Fundamentos de Matemáticas

M. en C. Jesús Rodríguez Franco
M. A. Mario Alfonso Toledano y Castillo
Q.F.B. Elva Cristina Rodríguez Jiménez
M. en Ing. Julio César Rodríguez Jiménez
Lic. María del Pilar Aguayo Flores
M. en Ing. Alberto Isaac Pierdant Rodríguez

ISBN 970-32-2087-8

Fondo Editorial
F C A

dgapa

LIBRO DIDÁCTICO

FCA
PRODUCTO PAPIME 2005

Publicaciones Empresariales UNAM FCA Publishing

Este libro forma parte de las
Publicaciones Empresariales UNAM. FCA Publishing
editadas por la Facultad de Contaduría y Administración.

Le invitamos a visitar nuestro sitio web:

http://publishing.fca.unam.mx

Tema 1 ÁLGEBRA

1.1 Álgebra de Conjuntos

OBJETIVOS

- Aprender los conceptos básicos
- Identificar y emplear la simbología
- Realizar las operaciones básicas de conjuntos
- Identificar y aplicar las propiedades algebraicas de los conjuntos
- Desarrollar el producto cartesiano y presentarlo gráficamente

CONTENIDO

1.1.1 Conceptos básicos
1.1.2 Operaciones entre conjuntos
1.1.3 Propiedades algebraicas
1.1.4 Aplicaciones
1.1.5 Conjunto ordenado
1.1.6 Producto Cartesiano y su representación gráfica

La teoría de conjuntos no es un nuevo planteamiento en la educación matemática, más bien es un sistema que emplea un lenguaje matemático muy específico para dar solución a determinado tipo de problemas.

Los conjuntos se han empleado para enseñar a contar y resolver problemas que incluyen la noción de cantidad, esto nos lleva a comprender el concepto de número entero con mayor facilidad y las ideas geométricas al emplear la teoría de conjuntos.

El aprender y comprender las nociones básicas de los conjuntos ayuda a la comprensión de otros temas matemáticos como son las funciones, probabilidad, muestreo, etc.

1.1.1 Conceptos Básicos

- Conjunto

Se le llama conjunto a una colección o agrupación de elementos perfectamente bien definidos y diferenciados dentro de un todo, por ejemplo:

1. Los estudiantes inscritos en el grupo 1102 de Matemáticas Básicas de la Licenciatura en Administración en la FCA-UNAM.
2. El grupo Salinas, es un conjunto de empresas dedicadas a la comunicación en el Estado Nuevo León.
3. El conjunto de todas las erogaciones efectuadas en el mes de enero de este año por la Dirección de Suministros y Adquisiciones de la Universidad Nacional Autónoma de México[1]

- Requisitos para formar un conjunto

a) A los elementos hay que agruparlos o coleccionarlos de una manera bien definida.

b) Ningún elemento del conjunto se debe contar más de una vez, si un elemento se repite se debe quitar (todos los elementos deben ser distintos).

c) El orden en que se enlistan los elementos no tiene importancia.

- Representación de conjuntos

a) En general a un conjunto se le asigna cualquier nombre o se denotan con las letras mayúsculas del abecedario (A, B, C, ... etc.).

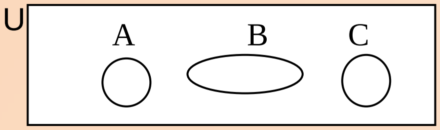
b) Los elementos de un conjunto se colocan entre llaves { } y separados por comas, ejemplo: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

[1] Tomado con modificaciones de Kleiman A. K de Kleiman E. *Conjuntos Aplicaciones Matemáticas a la Administración*, Noriega Limusa, 1991.

c) Los elementos de los conjuntos se representan con símbolos numéricos, letras minúsculas del abecedario y la combinación de los dos anteriores, por ejemplo:

c.1 A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}
c.2 B = {a, e, i, o, u}
c.3 C = {casa, 4x, 2b, 3*}

d) La representación gráfica es a través de los diagramas de Venn Euler.



Descripción de conjuntos

Existen dos formas de describir a los conjuntos por extensión (o tabular o enumeración) y por comprensión (o constructiva o descriptiva).
Cuando el conjunto se describe por extensión se enlistan o nombran a todos los elementos del conjunto, por ejemplo: El conjunto A de vocales {a, e, i, o, u}, el conjunto B las siete Ss para organizaciones efectivas[2] B = {estructura, estrategia, sistemas, valores comparativos, estilo, habilidades, personal}.
Cuando el conjunto se describe por comprensión consiste en mencionar una regla la cual permite encontrar todos los elementos del conjunto, por ejemplo: El conjunto A = {x / x sean los números naturales}, el conjunto B = {x / x es un socio de TV-América}.

Conjunto finito e infinito

Un conjunto es finito cuando se pueden contar uno a uno hasta alcanzar el último de los elementos que lo forman, ejemplo el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}, el conjunto B = {x / x sea el número de empleados de un supermercado}.

El conjunto es infinito si no se conoce el último elemento que lo forma (porque siempre hay un elemento más que contar), ejemplo en el conjunto A se enlistan algunos de los números primos A = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13,...}, el conjunto

B = {x / x sea el número de personas que compran diferentes artículos por Internet}.

Conjunto vacío o nulo

Es el conjunto que no contiene elementos y se acostumbra representarlo con los símbolos { } o por ϕ , ejemplo:

---

[2] Revista Contaduría y Administración, No. 200, enero-marzo 2001, pág. 85.

1. A = {x / x sean las mujeres mexicanas que hayan viajado a la luna}
2. B = {x / sean las mujeres investigadoras de 100 años de edad en la Antártida}

Muchas veces se define un conjunto vacío recurriendo a un par de contradicciones mutuamente contradictorias, por ejemplo[3]:

A = {x / x > 10 y x < 7} el conjunto A lo llamamos conjunto vacío, por no tener ningún elemento que simultáneamente sea mayor de 10 y menor de 7.

Advertencia:

a) ϕ es distinto de cero ($\phi \neq 0$) y de {0}, porque ϕ es un conjunto sin elementos y {0} es un conjunto con el elemento 0 (cero).

b) El número cero no es un conjunto ($0 \neq \{0\}$).

El conjunto vacío ϕ es un subconjunto de cualquier conjunto A, excepto de sí mismo.

- Pertenencia

Cuando se relaciona a un elemento con el conjunto al cual pertenece se utiliza el símbolo $\in$ que se emplea para abreviar pertenece o es miembros de o es elemento de.
Ejemplo:

1) A = {1, 2, 3, 5} y B = {4, 6, 7, 8}

ENUNCIADO	**NOTACIÓN**
4 no es elemento de A:	$4 \notin A$
7 es un elemento de B:	$7 \in B$

Otra forma de representarlo:

4 no es un elemento de A:	$4 \notin \{1, 2, 3, 5\}$
7 es un elemento de B:	$7 \in \{4, 6, 7, 8\}$

2) Como las cuentas nos van a servir para representar los valores del balance contable[4], las clasificamos desde el punto de vista del documento en el

[3] Tomado con modificaciones de Kleiman A. K de Kleiman E. *Conjuntos, Aplicaciones Matemáticas a la Administración*, Noriega, Limusa,1991, pág. 27.

conjunto VB = {cuenta de activo, cuenta de pasivo, cuenta de capital}.

Por lo que se refiere a su principal movimiento y a su saldo las cuentas quedan clasificadas e indicadas en el conjunto PMyS = {Cuentas deudoras y cuentas acreedoras}, por lo tanto tendremos:

Cuentas deudora **no** es elemento de VB	Cuenta deudora $\notin$ VB
Cuenta de activo **es** elemento de VB	Cuenta deudora $\in$ VB

➢ Igualdad de conjuntos

Se dice que dos conjuntos A y B son iguales si sólo si tienen exactamente los mismos elementos y se escribe como A = B, si dos conjuntos son iguales esto equivale a decir que realmente no se tienen dos, sino que sólo existe un conjunto con dos nombres diferentes, ejemplo:

A = {Nuevo Consultorio Fiscal, Emprendedores, Contaduría y Administración}

B = {Emprendedores, Contaduría y Administración, Nuevo Consultorio Fiscal}

Entonces: A = B

Es importante observar que no tiene importancia el orden en que se enlistan los elementos en cada conjunto, lo relevante es que tengan exactamente los mismos elementos.

A = B si sólo si para todo $a \in A$ implica $a \in B$ y para todo $b \in B$ se tiene que $b \in A$.

Cuando dos conjuntos se encuentran expresados por comprensión, pueden ser iguales, aunque las propiedades que los definan sean diferentes.

A = {x / C(x) = 50 200 pesos} y B = {x / mx + b = 50 200}; entonces A = B

Nota: C(x) costo total, mx costo variable y b costo fijo.

Propiedades:

Reflexiva	A = A
Simétrica	A = B implica B = A
Transitiva	A = B y B = C se tiene que A = C

[4] Con modificaciones tomado del libro López S. Tomas, *Contabilidad Razonada*, Fondo Editorial FCA-UNAM, 1990, pág. 96.

➢ Inclusión

Inclusión impropia: se dice que para dos conjuntos A y B la proposición $A \subseteq B$, significa que todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B. El símbolo de inclusión ($\subseteq$) se debe de leer "es subconjunto de".

Ejemplo:
Comportamiento del acero en México en año de l998.

1. A = {Producción, Consumo aparente} y B = {Producción, Consumo aparente}
   Se tiene que $\mathbf{A \subseteq B}$
2. {6 978 miles de toneladas, 6 507 miles de toneladas} $\subseteq$ {6 978 miles de toneladas, 6 507 miles de toneladas}[5]

Inclusión propia: si A y B son dos conjuntos tales que A es subconjunto de B, y B tiene por lo menos un elemento que no es miembro de A, entonces la relación de inclusión es propia y se simboliza con $A \subset B$. El símbolo de inclusión ($\subset$) se debe de leer "es subconjunto propio de", ejemplo:

1. A = {Producción, Consumo aparente}
   B = {Producción, Consumo aparente, Producción (variación anual)}
   Se tiene que $\mathbf{A \subset B}$
2. {6 978 miles de toneladas, 6 507 miles de toneladas} $\subset$ {6 978 miles de toneladas, 6 507 miles de toneladas, -1.11 miles de toneladas}

Propiedades

a) Propiedad reflexiva, todo conjunto es subconjunto de sí mismo ($A \subseteq A$).
b) Para dos conjuntos A y B, si $A \subset B$ es cierta, entonces $B \subset A$ será falsa, excepto en el caso de que A = B. La relación de inclusión no es simétrica.
c) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$. La inclusión es una relación transitiva.
d) El conjunto vacío (ϕ) es subconjunto de cualquier conjunto ($\phi \subseteq A$) excepto de sí mismo.

[5] Fuente: Canacero, *Diez años de Estadística Siderúrgica en México: 1989-1998*, pág. 3.

➢ Conjunto de partes

Se conoce como partes de un conjunto A, al conjunto de todos los subconjuntos de A y se simboliza con P(A). Para conocer el número de elementos del conjunto de partes (A) es con la expresión 2^n, donde n es el número de elementos de A.

Ejemplo:

Sea A = {a, b, c}

Solución:

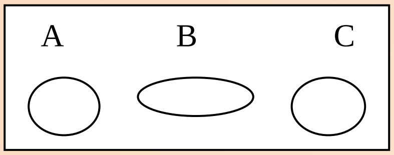
$2^n = 2^3 = 8$, el número de subconjuntos de A son ocho y son los siguientes

P(A) ={ {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}, ϕ }

➢ Diagramas de Venn Euler

Son gráficos para representar conjuntos. Se utilizan áreas rectangulares, ovales y circulares para visualizar los conjuntos. Por ejemplo el conjunto universal se representa con un rectángulo, dentro del cual se grafican los subconjuntos de este en forma de círculos u óvalos.

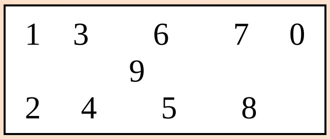
U



➢ Conjunto Universal

Con frecuencia ocurre que el conjunto de elementos que intervienen en un experimento o en una investigación o discusión, es a su vez un subconjunto de otro conjunto que se llama conjunto universal (es el todo) se denota con la letra U, ejemplo el conjunto de los dígitos U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}

U



1.1.2 Operaciones entre conjuntos

En teoría de los conjuntos existen cuatro operaciones básicas: la unión, intersección, complemento y diferencia. Estas operaciones se obtienen utilizando otros conjuntos diferentes al conjunto que se obtiene como resultado de la operación.

- **Unión**

Cuando se unen dos conjuntos A y B, da como resultado un tercer conjunto $A \cup B$, y esta formado por todos los elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos conjuntos. La expresión $A \cup B$ se lee A unión B.

La unión del conjunto A y el conjunto B se define como el conjunto de todas las x tales que todas las x pertenecen a A o tales pertenecen a B o a ambos.

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A$ **o** $x \in B\}$ $\qquad$ $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

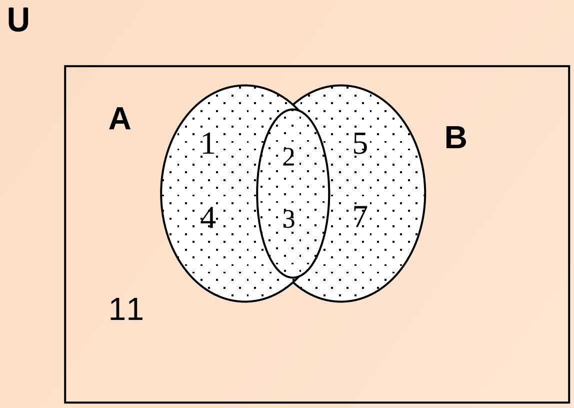
Nota: La palabra **o** es clave para recordar la operación de unión en teoría de conjuntos y su interpretación es en sentido inclusivo del uso matemático de la conjunción.

Ejemplo:

Encontrar la unión del conjunto A y del conjunto B.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$



- Problemas propuestos

1. Encontrar la unión del conjunto A y del conjunto B.

Estructura de siete Ss para organizaciones efectivas = U

U = {estructura, sistema, estrategia, valores compartidos, habilidades, personal, estilo}

A = {estructura, sistemas, estrategia, valores compartidos}

B = {habilidades, personal, estilo}

Respuesta:

$$A \cup B = \{estructura, sistemas, estrategia, valores\ compartidos, habilidades, personal, estilo\}$$

- Propiedades de la unión

a) La operación de la unión de conjuntos es conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

b) Para cualquier conjunto A que se une consigo mismo, el resultado siempre será igual al conjunto A

$$A \cup A = A$$

$$A \cup A = \{x / x \in A \textbf{ o } x \in A\} = A$$

c) La unión del conjunto A con el conjunto universal U es igual al conjunto universal.

$$A \cup U = \{x / x \in A \textbf{ o } x \in U\} = U$$

d) La unión del conjunto A y ϕ es igual al conjunto A

$$A \cup \phi = \{x / x \in A\} = A$$

e) La unión de un conjunto A con su complemento $\overline{A}$ es igual al conjunto universal U

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cup \overline{A} = \{x / x \in A \textbf{ o } x \in \overline{A}\} = U$$

f) La unión de los sucesos A, B y C es igual a:

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

entonces la operación de unión de conjuntos es asociativa

$$A \cup B \cup C = \{x / x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C\}$$

➢ Intersección

Cuando se intersectan dos conjuntos A y B, da como resultado un tercer conjunto $A \cap B$, y está formado por todos los elementos que pertenecen a A y B (a ambos) conjuntos. La expresión $A \cap B$ se lee A intersección B.

La intersección del conjunto A y el conjunto B se define como el conjunto de todas las x tales que todas las x pertenecen A y B.

$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \textbf{ y } x \in B\}$ $\qquad$ $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

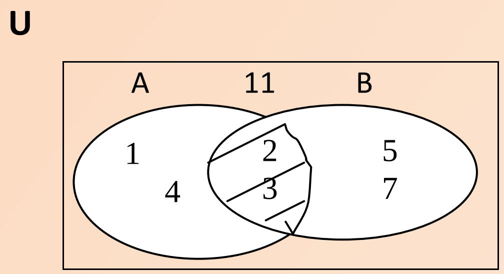
Nota: la palabra **y** es clave para recordar la operación de intersección en teoría de conjuntos y su interpretación es en sentido inclusivo del uso matemático de la conjunción.

Ejemplo:

1. Encontrar la intersección del conjunto A y del conjunto B.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7\}$

$A \cap B = \{2, 3\}$



➢ Propiedades de la intersección

a) La operación de la intersección de conjuntos es conmutativa.

$$A \cap B = B \cap A$$

b) Para cualquier conjunto A que se intersecta con sí mismo, siempre será igual al conjunto A.

$$A \cap A = A$$

$$A \cap A = \{x \,/\, x \in A \textbf{ y } x \in A\} = A$$

c) La intersección del conjunto A con el conjunto universal U es igual al conjunto A.

$$A \cap U = \{x \,/\, x \in A \textbf{ y } x \in U\} = A$$

d) La intersección del conjunto A y ϕ es igual al conjunto vacío.

$$A \cap \phi = \phi$$

e) La intersección de un conjunto A con su complemento $\overline{A}$ es igual al conjunto vacío.

$$A \cap \overline{A} = \phi$$

f) La intersección de los conjuntos A, B y C, es:

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Entonces la operación de intersección de conjuntos es asociativa

$$A \cap B \cap C = \{x \,/\, x \in A \ \mathbf{y}\ x \in B \ \mathbf{y}\ x \in C\}$$

g) La intersección y unión de los conjuntos A, B y C, es:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Entonces la operación de intersección y unión de conjuntos es asociativa.

- **Diferencia**

La diferencia entre dos conjuntos A y B, da como resultado un tercer conjunto, formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se simboliza A - B y se lee "A diferencia con B".

$A - B = \{x \,/\, x \in A \ \mathbf{y}\ x \notin B\}$ $\quad$ $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

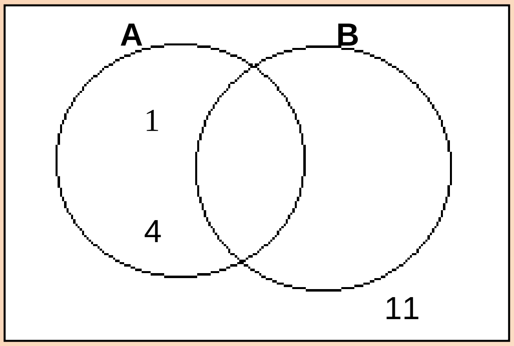
$B - A = \{x \,/\, x \in B \ \mathbf{y}\ x \notin A\}$ $\quad$ $B - A = \{x \,/\, x \in B \wedge x \notin A\}$

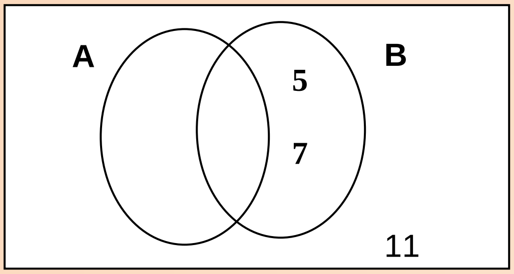
Ejemplo:

1. Encontrar la diferencia del conjunto A y del conjunto B.

   U = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 11}, A ={1, 2, 3, 4} y B = {2, 3, 5, 7}

   R. A - B = {1, 4} B - A = {5, 7}





- Propiedades de la diferencia

1. La operación de diferencia no es conmutativa.

$$A - B \neq B - A$$

2. Sean las expresiones A - B = $\{x / x \in A$ **y** $x \notin B\}$ y B - A = $\{x / x \in A$ **y** $x \notin B\}$ las que definen a la diferencia, por lo que se deduce fácilmente lo siguiente:

$$A - B \subset A \qquad y \qquad B - A \subset B$$

3. Si A es un subconjunto de B y no hay elementos de A que estén incluidos en B, entonces al conjunto A – B carece de elementos, y se denota como:

$$A - B = \phi$$

4. Si los conjuntos son mutuamente excluyentes (no tienen elementos en común), la intersección de dos de cualesquiera de ellos da como resultado el conjunto vacío.

   Sean los conjuntos: $(A - B)$, $(B - A)$ y $(A \cap B)$

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$$
$$(A - B) \cap (B - A) = \phi$$
$$(B - A) \cap (A \cap B) = \phi$$

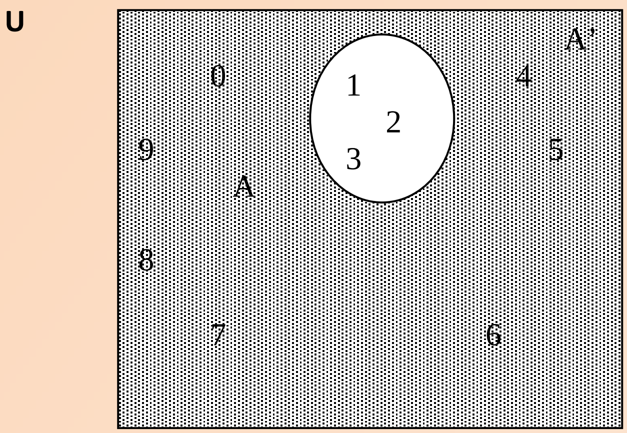
➢ Conjunto complemento

Si U es un conjunto y dentro de U, existe un conjunto A con todos sus elementos, pero además hay elementos que no pertenecen al conjunto A, al conjunto que se forma con estos últimos se les llama elementos del conjunto complemento de A y se simboliza por $\overline{A}$ o À o A^c o ~A, en otras palabras el conjunto complemento $\overline{A}$ está formado por todos los elementos del conjunto universal que no están incluidos en el conjunto A, ejemplo:

Por definición el complemento de A es el conjunto de elementos x que pertenecen a U pero no pertenecen a A.

$\overline{A} = \{x \,/\, x \in U \text{ y } x \notin A\} = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$

1. Sea U el conjunto de los números dígitos U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}
   A = {1, 2, 3} entonces $\overline{A}$ = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}



➢ Propiedades

El complemento del conjunto universal U es el conjunto vacío ϕ

$$\overline{U} = \phi$$

El complemento del conjunto vacío ϕ es el conjunto universal U

$$\overline{\phi} = U$$

Sea $\overline{A}$ el complemento del conjunto A, y $(\overline{A})^c$ su complemento

$$(\overline{A})^c = \{x \,/\, x \notin \overline{A}\} = \{x \,/\, x \in A\} = A$$
$$(\overline{A})^c = A$$

El complemento de A está formado por todos los elementos de U que no le pertenecen A, entonces el complemento de $\overline{A}$ está formado por todos los elementos de U que no están en $\overline{A}$ y estos son exactamente los elementos del conjunto A[6].

Nota: Esta propiedad se interpreta en el sentido de que la operación de complementación es su propia inversa.

1.1.3 Propiedades Algebraicas

Las propiedades algebraicas que se enlistan a continuación caracterizan a un sistema matemático que se conoce como álgebra de conjuntos.

1) Idempotencia
   a) $A \cap A = A$
   b) $A \cup A = A$
2) Conmutativa
   a) $A \cap B = B \cap A$
   b) $A \cup B = B \cup A$
3) Asociativa
   a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4) Distributiva
   a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5) Ley de Morgan
   a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
6) Complementación
   a) $(\overline{A})^c = A$
   b) $A \cup A^c = U$
   c) $(\overline{U})^c = \phi$
   d) $(\phi)^c = U$
7) Identidad
   a) $A \cup U = U$
   b) $A \cup \phi = A$
   c) $A \cap U = A$
   d) $A \cap \phi = \phi$

[6] Op. Cit. Kleiman A., Kleiman E. K. Pág. 57.

8. Si $A \subset B$ entonces para cualquier A y cualquier B se cumple:
   a) $A \cup B = B$
   b) $A \cap B = A$
   c) $(A \cap B) \subset A$
   d) $A \subset (A \cup B)$

1.1.4 Aplicaciones

➢ Cardinal de un conjunto

Si A es un conjunto finito, la cardinalidad de A es el número de elementos de A, y se simboliza n(A), por ejemplo:

a) Si A = {x / x es una letra del abecedario castellano} entonces n(A) = 29

b) Si B = {x / x son las revistas que edita la FCA –UNAM} entonces n(B) = 3

1.1.5 Conjunto ordenado

El orden es una relación entre los elementos de un conjunto y el orden surge de la propia naturaleza de los elementos que lo forman, por ejemplo:

a) Los alumnos que forman el cuadro de honor.
b) La sucesión de presidentes constitucionales de un país.

Otras veces el orden no surge en forma natural, sino que se origina a partir de un criterio convencionalmente aceptado, por ejemplo:

a) Las letras del abecedario, en el orden alfabético convencional.
b) El orden de los caracteres en el registro federal de causantes, según sus apellidos y fechas de nacimiento.

➢ Pares ordenados

Son las parejas o los pares o conjunto de elementos tales como: {a, b}, {0, 1}, {x, y}, {interno, externo}, para indicar que uno de estos pares está ordenado se utilizan los paréntesis o en otra forma se escribe como (a, b) y es el conjunto ordenado formado por dos elementos en donde **a** es el primero y **b** el segundo.

- Igualdad de pares ordenados

Sean los conjuntos:
P = {a, b} y Q = {c, d}, por la definición de igualdad de conjuntos P = Q, si a = c, b = d **o** a = d, b = c.

En cambio si los pares ordenados son:

P = (a, b) y Q = (c, d), entonces P ≠ Q, cuando P = Q, es necesario, que a = c y b = d

Conclusión: Dos pares ordenados son iguales, si sólo si, el primero y segundo elementos de un par son iguales respectivamente, al primero y segundo elemento del otro par.

- Conjunto de pares ordenados

Conjunto A = {(a, b), (c, d), (e, f)} está formado por tres elementos y cada uno de los cuales es un par ordenado.

Ternas ordenadas.

Conjunto B = {(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i)} está formado por tres elementos y cada uno de los cuales es una triada ordenada.

1.1.6 Producto cartesiano

Se define como P x Q = {(x, y) / x ∈ P y y ∈ Q} y se lee P cartesiano Q es el conjunto formado por los pares ordenados (x, y), tales que x es un elemento de P y es un elemento de Q.
Ejemplo:

1. Sean:

   M = {x / x es un número natural}

   N = {y / y es una letra del abecedario}

   M x N = { (x, y) / x es un número natural, y es una letra del abecedario}

2. Sean:

   M = {2, 6, 0}

   N = {3, 7}

   M x N = { (2, 3), (2, 7), (6, 3), (6, 7), (0, 3), (0, 7)}

➢ Propiedades del producto cartesiano

1. El producto cartesiano de conjuntos no es conmutativo

   A x B ≠ B x A   a menos que A = B

2. A x A se simboliza como:

   A x A = {(x, y) / x ∈ A, y ∈ A}
   Si A = {a}, entonces: A x A = {a, a}

➢ Número de elementos de un producto cartesiano

Sea $n(A) = n_1$ y $n(B) = n_2$, entonces: $n(A \times B) = n_1 \bullet n_2$

en donde:

n_1 es el número de elementos del conjunto A.
n_2 es el número de elementos del conjunto B.

Utilizando la propiedad conmutativa, se tiene: n (A x B) = n (B x A).

Ejemplo:

Sea P = {a, b, c} n(P) = 3

Q = {r, s, t, u} n(Q) = 4
n(P x Q) = 3 x 4 = 12
n(Q x P) = 4 x 3 = 12
P x Q = {(a, r), (a, s), (a, t), (a, u), (b, r), (b, s), (b, t), (b, u), (c, r), (c, s), (c, t), (c, u)}

1.2 Números Reales

OBJETIVOS

- Entender los conceptos básicos
- Distinguir y emplear la simbología
- Identificar, aplicar las propiedades y teoremas
- Realizar las operaciones básicas empleando los teoremas y sus propiedades

CONTENIDO

1.2.1 Conjuntos números naturales
1.2.2 Sistema numérico de números enteros
1.2.3 Conjunto de números racionales
1.2.4 Conjunto de números irracionales
1.2.5 Conjunto de los números reales
1.2.6 Axiomas de los números reales
1.2.7 Teoremas de los reales
1.2.8 Intervalos de los números reales
1.2.9 Valor absoluto

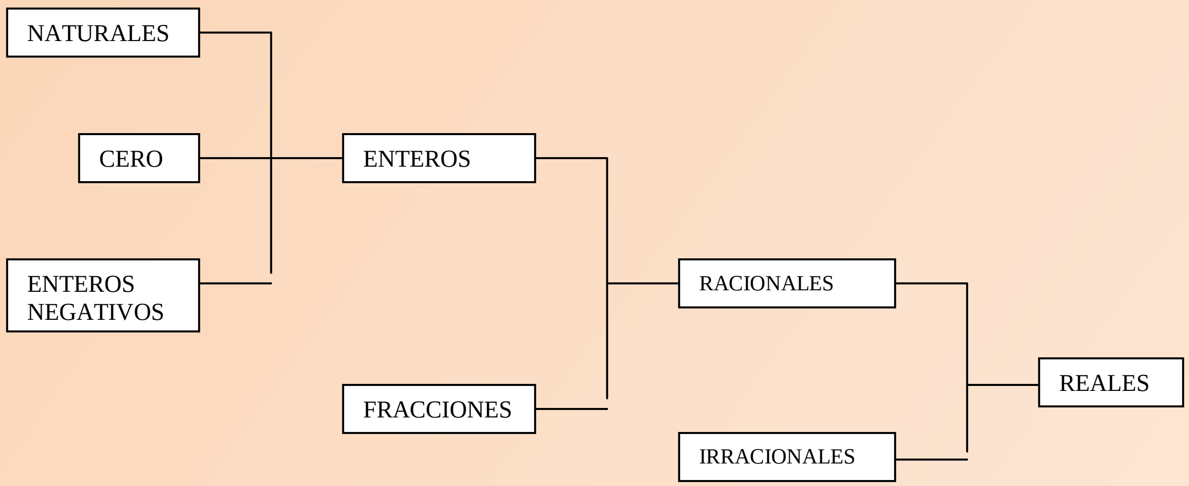
CONJUNTOS NUMÉRICOS

INTRODUCCIÓN

SISTEMAS NUMÉRICOS

Un sistema numérico es un conjunto que por tener determinadas propiedades (una estructura algebraica) recibe un nombre específico.

El siguiente diagrama nos muestra los diferentes conjuntos numéricos y las relaciones que existen entre ellos.



1.2.1 Conjunto de números naturales

El conjunto numérico más común y sencillo es el formado por un número natural.

El conjunto de números naturales está formado por los enteros positivos, sus operaciones dan como resultado un número natural.

Notación de números naturales: **N**

Ejemplo: $N = \{1,2,3, \ldots \}$

SUMA $A + B = C$

MULTIPLICACIÓN $A * B = D$

Ejemplo:

1) Sea la ecuación $x = B + A$

   $11 = 9 + 2$

2) Sea la ecuación $x = B*A$

   $18 = 9*2$

Notación de naturales que incluyen al cero: $\mathbf{N_o}$

Ejemplo: $N_o = N \cup \{\phi\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots \}$

Notación de los números negativos: **I**

Ejemplo: $\mathbf{I} = \{ -\infty, \ldots., -3, -2, -1\}$

1.2.2 Sistema numérico de números enteros

Es el conjunto formado por todos los números naturales, sus negativos y el número cero.

Notación de números enteros: **Z**

donde: $\mathbf{N \subset No \subset Z}$

Ejemplo:

$Z = \{ \ldots ,-2,-1,0,1,2,3, \ldots \}$

- Suma, resta y multiplicación:

1. SUMA

Si $a, b > 0$

Sea $a + b > 0$

Ejemplo $5 + 4 = 9$

2. RESTA

a) Si $a, b < 0$
entonces: $-a + (-b) < 0$
Ejemplo $-5 + (-4) = -9 < 0$

b) Si $a > 0$; $b < 0$
Ejemplo $5 + (-3) = 2$; como se observa $2 > 0$ y $a + b > 0$

c) Si $a > 0$; $b < 0$
Ejemplo $3 + (-5) = -2$; como se observa $-2 < 0$ y $a + b < 0$

1.2.3 Conjunto de números racionales

Para la división se necesita construir otro conjunto numérico y este es el conjunto de números racionales o fraccionarios, que son números de la forma p / q, donde p, q son enteros y q es diferente de 0 ($q \neq 0$).

Notación de números racionales:

$$Q = \{p / q / (p, q) \in Z, q \neq 0\}$$

Donde: $N \subset Z \subset Q$

Ejemplo:

$Q = \{ \ldots -4, -3/4, \ldots 0 \ldots 1/2, 1, \ldots \}$

- Propiedad fundamental de las proporciones

Si: $a, b, c, d \in R$ y $b, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad a * d = c * b$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{9}=\frac{12}{36} \qquad 3*36 = 9*12=108$$

Operaciones

1) SUMA

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\bullet d+b\bullet c}{b\bullet d}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2*5+3*4}{15}=\frac{22}{15}$$

2) RESTA

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\bullet d-b\bullet c}{b\bullet d}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{10-12}{15}=\frac{-2}{15}$$

3) MULTIPLICACIÓN:

$$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{a*c}{b*d}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}*\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

4) DIVISIÓN:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Nota: Una característica importante de los números racionales es que pueden ser identificables por su representación decimal.

Ejemplo:

4.1 Resultado con un número entero

$$\frac{3}{5} \div \frac{1}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

4.2 Resultado con un número decimal periódico

1) $\frac{1}{3} = 0.33333 = 0.\overline{333}$

2) $\frac{2}{7} = 0.285714285714 = 0.\overline{285714}$

4.3 Resultado con un número decimal no periódico y definido de cifras.

1) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5\overline{00} = 0.5$

2) $\frac{3}{4} = 0.75\overline{00} = 0.75$

1.2.4 Conjunto de números irracionales

Esta formado por fracciones no periódicas, otra forma de explicarlo es indicar que la fracción es decimal infinita.

Notación de los números irracionales: **Q\` o Q^c**

Ejemplos:

1) $\frac{501}{23} = 21.782608$

2) $\frac{62}{7} = 8.8571428$

otros números que son considerados irracionales son:

Ejemplos:

1) $\pi = 3.1415926$

2) $e = 2.7182818$

3) $\sqrt{2} = 1.4142135$

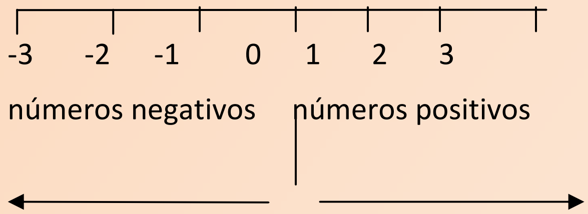
1.2.5 Conjunto de los Números Reales

Se llama así al conjunto formado por la unión de los números racionales y los números irracionales.

Notación:

$$R = Q \cup Q^c \quad ó \quad N \subset No \subset Z \subset Q \subset R$$

Su representación se hace a través de una recta:



1.2.6 Axiomas de los Números Reales

En el conjunto de los números reales se definen dos operaciones: la suma y el producto.

1. Clausurativo

La suma de a + b y el producto de a*b dan como resultado números reales

Si: $a, b \in R$ entonces:

a) Suma $a + b \in R$

b) Multiplicación $a \times b \in R$

2. Conmutativos

Si: $a, b \in R$ entonces:

a) Suma $a + b = b + a$

b) Multiplicación $(a \times b) = (b \times a)$

3. Asociativos

Si: a, b y c $\in R$ entonces:

a) Suma $(a + b) + c = a + (b + c)$

b) Multiplicación $(a \times b)\, c = a\, (b \times c)$

4. Distributivos

Si: a, b y c $\in R$ entonces:

a) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

b) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

5. Elementos neutros o idénticos

a) El número $0 \in R$, tal que $a + 0 = 0 + a$, para toda $a \in .R$.

b) El número $1 \in R$, tal que $a \times 1 = 1 \times a = a$, para toda $a \in R$.

6. Elementos inversos[7]

a) Inverso aditivo de a

Para todo número real a existe un número real llamado inverso aditivo de a y se simboliza por –a, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

[7] Eslava, Ma. E. y J. R. Velasco. *Matemáticas Universitarias.* Colombia, Mc. Graw-Hill, 1997, págs 50 y 51.

b) Inverso multiplicativo de a

Para todo número real a $\neq 0$ existe un número real llamado inverso multiplicativo, simbolizado por:

$$\left(\frac{1}{a}\right), \text{tal que: } a * \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) * a = 1$$

1.2.7 Teoremas de los Números Reales

Teorema 1 (igualdad)

Si a, b y c representan números reales y si a = b, entonces:

a) Suma $a + c = b + c$ y $a - c = b - c$
b) Multiplicación $a \times c = b \times c$ para toda c
c) División $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}, \quad para\ toda\ \ c \neq 0$
d) Transitiva, si a = b, y b = c, entonces a = c

Teorema 2

Para todo número real a, $a \times 0 = 0$

Teorema 3

Si a y b son números reales, $a \times b = 0$, entonces: $a = 0$ ó $b = 0$

Teorema 4

Para todo número real a, $a(-1) = -a$

Teorema 5

Si a y b son números reales, entonces: $(-a)(-b) = ab$

Teorema 6

Si a, b y c son números reales, $a \times b = c$ con $a \neq 0$, entonces:

$$b = \left(\frac{1}{a}\right) * c = \left(\frac{c}{a}\right)$$

Teorema 7

Si a, b y c son números reales, $a \times c = b \times c$, con $c \neq 0$, entonces: $a = b$

- Casos especiales

Números decimales

Es el conjunto del cero al nueve, que nos sirven para contar.

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Números primos

Los números primos es el conjunto que pueden dividirse solamente entre sí mismo y la unidad, y dan como resultado un número entero.

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots\}$$

Números denominados

Es el conjunto de números que no se ajustan al sistema métrico decimal.

Ejemplos:

1.	Ángulos	357°, 36”
2.	Horas	23 horas, 15 minutos
3.	Medida inglesa	1 yarda = 3 pies 1 pie = 12 pulgadas 1 libra = 16 onzas

Números pares

El conjunto de números pares se describe de la siguiente manera:

$$\{x \in Z \ / \ x = 2b, \ b \in Z\}$$

Ejemplo:

{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ... }

Números impares

El conjunto de números impares se describe de la siguiente manera:

$$\{x \in Z \ / \ x = 2b + 1, \ b \in Z\}$$

Ejemplo:

{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... }

1.2.8 Intervalos de los Números Reales

TIPO	INTERVALO	*DESCRIPCIÓN*	GRÁFICA	EJEMPLO
Cerrado	[a, b]	$a \leq x \leq b$	a b	[0,10]
Abierto	(a, b)	$a < x < b$	a b	(-5,5)
Semi-abiertos	(a, b] [a, b)	$a < x \leq b$ $a \leq x < b$	a b a b	(-3,1] [0,5)
Infinito	[a,+∞) (a,+ ∞) (-∞,b] (-∞,b) (-∞,+∞)	$a \leq x$ $a < x$ $x \leq b$ $x < b$ todos los números reales	a a b b 	[10,+ ∞) (-3,+ ∞) (-∞,-3] (-∞,10) (-∞,+∞)

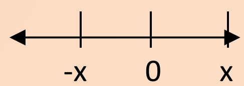
1.2.9 Valor absoluto

Para cualquier número real **a,** se define su valor absoluto como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a\ ; & \text{si } a \geq 0 \\ -a\ ; & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

y se denota mediante $|a|$.

Esto significa que el valor absoluto de un número siempre es positivo, Salvo en el caso de cero cuyo valor absoluto es cero.
Sobre la recta numérica la distancia que existe entre un número x y 0 (cero). Se le denomina Valor Absoluto de x.

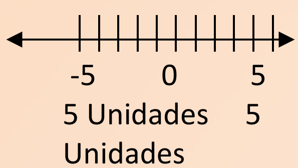


Ejemplo:

1.

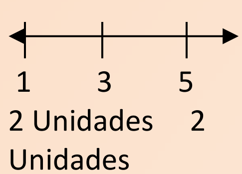
$|5| = 5$

$|-5| = -(-5) = 5$

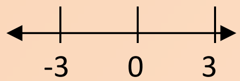


Tanto 5 como –5 están a 5 unidades de cero, hacia la derecha y a la izquierda.

2. La ecuación $|x - 3| = 2$ establece que la distancia entre x y 3 es de dos unidades. Por lo tanto x puede ir de 1 a 5.

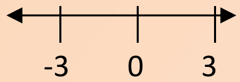


3. Si $|x| < 3$, entonces x está a menos de tres unidades de cero, por lo que, x debe estar entre -3 y 3, es decir $-3 < x < 3$.



$|x| < 3$

También como:



$-3 < x < 3$

➢ **Propiedades**

1. $|ab| = |a|\ |b|$

1 $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

2 $|a - b| = |b - a|$

3 $|-a| = |a|$

4 $|a + b| \leq |a| + |b|$

5 $|a| < b$ si sólo si $-b < a < b$

6 $|a| > b$ si sólo si $a > b$ o bien $a < -b$

1.3 Funciones

OBJETIVOS

- Entender y explicar el concepto de función
- Distinguir y emplear la simbología de funciones
- Calcular el valor funcional de una función
- Identificar la clasificación de las funciones
- Aplicar en forma adecuada el álgebra de funciones

CONTENIDO

1.3.1 Definición de función
1.3.2 Valor funcional de una función
1.3.3 Clasificación de las funciones
1.3.4 Tipos de funciones
1.3.5 Álgebra de funciones

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Cualquier estudio en el que se utilicen las matemáticas para dar solución a problemas prácticos o que se requiera el análisis de datos empíricos emplea este concepto matemático. La función es una idea de que una cantidad dependiente o está determinada por otra. Por ejemplo:

1. El área de un círculo depende de la longitud de su radio, si se conoce la longitud del radio, podemos determinar el área
2. El costo de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos[8] por mes.

1.3.1 Función

Definición

Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x del conjunto llamado dominio, con un sólo elemento f(x) de un segundo conjunto (con uno y sólo uno) llamado rango o contradominio de la función.

Una función consta de tres partes:

1. Un conjunto A llamado dominio de la función.
2. Un conjunto B llamado contradominio de la función.
3. Una regla de correspondencia f que asocia a todo elemento de A, uno y sólo un elemento del conjunto B.

La regla debe tener las siguientes propiedades:

1. Ningún elemento del dominio puede quedar sin elemento asociado en el contradominio.

[8] Jagdish C., Arya Robin y W. Lardner. *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía.* México, Prentice Hall, Tercera Edición, pág. 164.

2. Ningún elemento del dominio puede tener más de un elemento asociado en el contradominio. Esto no excluye que varios elementos del dominio tengan al mismo elemento asociado en el contradominio.

Si tenemos los conjuntos A y B y la regla de correspondencia se cumple con las propiedades señaladas, entonces la terna (A, B, f) es una función cuya notación es:

$$f : A \to B$$

Se lee f va de A hacia B

otra forma es:

$f(x)$ y se lee f de x

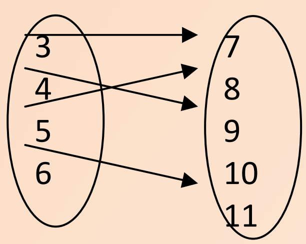
Se emplean por lo regular las letras f, g o h para simbolizar una función.

Si x es un elemento de A, entonces el elemento de B asociado a x por medio de la regla de correspondencia se expresa como f(x) y se le llama la imagen de x bajo f.
La regla de correspondencia de una función puede estar dada por un diagrama, una ecuación, una tabla de valores y una gráfica.

- Diagrama

El diagrama se construye formando dos óvalos y uniendo estos con una flecha que parte del primer óvalo hacia el segundo (dirección de izquierda a derecha). En el primer óvalo en su interior se anotan los valores de entrada de la función (dominio), en el segundo se anotan los valores de salida de la función (contradominio), se une con una flecha el valor de entrada con el valor de salida como se muestra en la figura 1.3.1.

Figura 1.3.1 Diagrama de la regla de correspondencia de una función



La imagen de 3 es 7
La imagen de 4 es 9
La imagen de 5 es 8
La imagen de 6 es 11

- Ecuación

En este caso se requiere plantear una ecuación con dos incógnitas como la que se muestra a continuación: $3x^2 - y + 4 = 0$.
Como primer paso se despeja a la variable dependiente (y), $\therefore$ $y = 3x^2 + 4$.

A la expresión anterior la presentamos en forma de función $f(x) = 3x^2 + 4$, en donde la función **(f)** es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) tales que x y y satisfacen a la ecuación $3x^2 – y + 4 = 0$, y se denota como:

$$f = \{(x, y) / y = 3x^2 + 4\}$$

En el dominio de la función están todos los posibles valores que toma la variable independiente (x) también los valores extremos y en el contradominio de la función se encuentran todos los valores posibles que pueden asignarse por el dominio y regla de transformación a la variable dependiente (y).

Ejemplo:

Sea la función (f) cuya regla es $f(x) = 3x^2 + 4$

El dominio es: {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3},

Los valores extremos son: **-** 3 y 3

El contradominio es {31, 16, 7, 4, 7, 16, 31} y está determinado por el dominio y la regla de transformación.

Una función que va de los reales a los reales se expresa con la notación:

$$f : R \to R$$

Los valores extremos en este caso no están determinados (no existen) en el dominio, porque éste contiene a todos los números reales, el contradominio está formado por todos los números reales y la regla de correspondencia está dada por una ecuación.
En los casos en que no se indica o se especifica el dominio de la función, entonces se debe de entender que el dominio incluye a todos los números reales (o también llamado dominio natural).

Ejemplo de funciones:

1. Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$

   El dominio son todos los reales $f = \{x \in R\}$ y el contradominio también esta formado por todos los números reales.
   Para este tipo de funciones polinomiales el dominio siempre será el conjunto de los números R.

2. Sí $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

   Solución:

   $$f(x) = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0} = operación\ no\ \det erminada$$

   El dominio son todos los reales excepto el 2, ya que la división entre cero no está determinada, $f = \{x \in R / x \neq 2\}$.

   El contradominio está formado por todos los números reales positivos excepto el cero, D = {y ∈ R^+/ (0 < x < ∞)}

   Para este tipo de funciones racionales el dominio siempre será el conjunto de los números reales excepto los que hacen cero el denominador de la función.

3. Si $f(x) = \sqrt{5x+2}$

   Solución:

   El subradical se expresa de la siguiente forma: 5x + 2 ≥ 0

   El signo debe ser ≥, porque no existen raíces cuadradas de números negativos.

   Se despeja el valor de x de la inecuación $x \geq -\dfrac{2}{5}$

   El dominio de $F = \{x \in R / x \geq -2/5\}$

   Para este tipo de función con radical y el índice par, el dominio siempre será formado por todos los números que hagan al subradical igual o mayor a cero.

- Casos en el que una expresión no cumple con ser una función:

a) La expresión y > x no define una función puesto que hay muchos valores de y para cada valor de x.

b) La expresión $x = y^2$ no define una función puesto que hay dos valores de y para cada valor positivo de x.

c) $x^2 + y^2 = 9$ no define una función, porque para cada valor positivo de x hay dos de y.

- Tabla de valores

Se selecciona primero la expresión que se va analizar, posteriormente se construye una tabla la cual debe incluir a la variable independiente (x) y la variable dependiente (y) Dentro de esta tabla se anotan los valores que va a tomar la variable independiente (valores de entrada) y se registran todos los valores que toma la variable dependiente (valores de salida).

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x + 2$

Solución:

Utilizando la tabulación, se registran los valores que toma x para encontrar los valores de y (también se registran en la tabla).
Los puntos extremos del dominio son –2 y 4

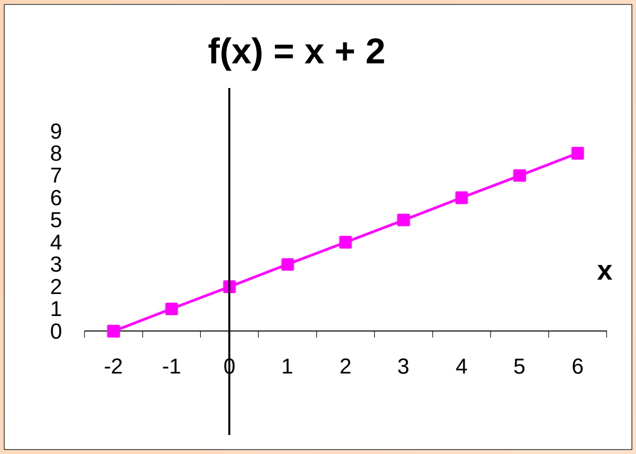
Tabla 1.3.1 Tabulación de la función $f(x) = x + 2$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	Dominio
y	0	1	2	3	4	5	6	Contradominio

- Gráfica

Para trazar la gráfica de una función es necesario tomar un conjunto de pares ordenados (x,y) de números reales (puntos), y estos puntos se trazan en el plano cartesiano dando como resultado una gráfica de puntos, al unir todos los puntos con una línea recta representa la gráfica de la función en estudio. Es importante aclarar que se pueden unir los puntos con una línea recta si la variable es continua.

Figura 1.3.2 Gráfica de la función $f(x) = x + 2$



1.3.2 Valor funcional de una función

El valor funcional de una función se refiere a asignar valores a la variable x o que la variable tome valores, para determinar el valor de f(x).

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 - 2x$ encontrar el valor funcional para los siguientes casos:

- si x = 4

$$f(4) = (4)^2 - 2(4)$$
$$= 16-8$$
$$\mathbf{= 8}$$

- si x = 4 + h

$$f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2(4+h)$$
$$= 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$$
$$\mathbf{= 8 + 6h + h^2}$$

Si $g(x) = (x - 3)^3 + 4$ encontrar el valor funcional para los siguientes casos:

- si $g(4) = (4 - 3)^3 + 4 = (1)^3 + 4 = 5$
- si $g(-1) = (-1-3)^3 + 4 = (-4)^3 + 4 = -64 + 4 = -60$
- si $g(c) = (c - 3)^3 + 4$

Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones determinan una función f con fórmula f(x)? Para los que lo hagan, determinar f(x). Despejar la variable y en términos de x (una y única para cada x).

   a) $x^2 + y^2 = 4$
   b) $xy + y + 3x = 4$
   c) $x = (3y + 1)^{1/2}$
   d) $3x = y / (y + 1)$

2. Para $g(u) = {}^{3}\!/_{u-2}$ encuentra el valor funcional para cada uno de los siguientes casos y llevarlos hasta su mínima expresión.

   a) $g(2)$
   b) $g(2 + h)$
   c) $g(2+h) - g(2)$
   d) $(g(2+h) - g(2))/h$

3. Encuentra el dominio natural ($f : R \to R$)

   a) $f(x) = (2x + 3)^{1/2}$
   b) $g(x) = (x^2 - 9)^{1/2}$
   c) $f(t) = (4 - t^2)/(t^2 - t - 6)$

1.3.3 Clasificación de las funciones

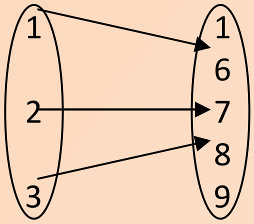
Para clasificar las funciones tomaremos como referencia el contradominio, y son tres tipos las Inyectiva (unívoca), Sobreyectiva (suprayectiva), Biyectiva (biunívoca).

a) Función inyectiva, cuando a cada elemento del contradominio le corresponde sólo un elemento del dominio, sin importar que sobren en el contradominio.

Ejemplo:

$f : A \rightarrow B$

A = { 1, 2 , 3 }
B = { 1, 6, 7, 8, 9 }
f(x) = x + 5



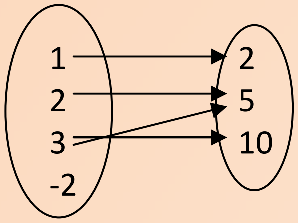
Es una función inyectiva

b) Función sobreyectiva, cuando a todo elemento del contradominio le corresponde uno o más elementos del dominio, no deben sobrar elementos en el contradominio, no importa que algunos elementos del contradominio sean imágenes de más de un elemento del dominio.

Ejemplo:

$f : A \rightarrow B$

A = { 1, 2, −2, 3 }
B = { 2, 5, 10 }
f(x) = x^2 + 1

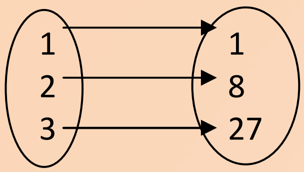


Es una función sobreyectiva

c) Función biyectiva, de todo elemento del contradominio es imagen de uno y solamente un elemento del dominio. Es una combinación de los otros tipos de funciones, No sobran elementos y ningún elemento es imagen de más de un elemento del dominio.

Ejemplo:

$$g : C \rightarrow D$$

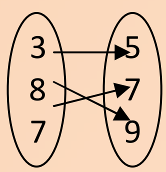


C = { 1, 2, 3 }
D = { 1, 8, 27 }
$g(x) = x^3$

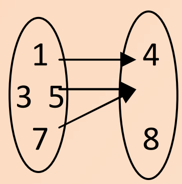
- Problemas propuestos

De los diagramas siguientes, ¿cuáles definen una función y de qué tipo son?

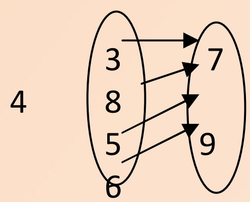
a)



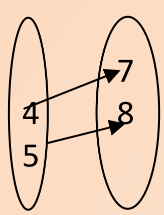
b)



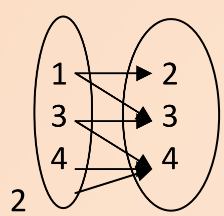
c)



d)



e)



1.3.4 Tipos de funciones

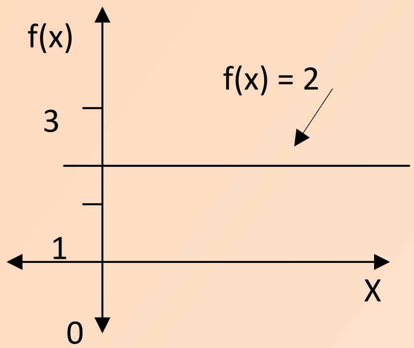
Las funciones se clasifican en algebraicas y trascendentes

- Funciones algebraicas

- Función constante:

$$f(x) = k$$

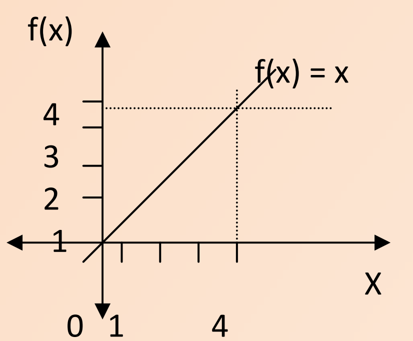
Donde k es una constante (número real).
Su gráfica es una línea horizontal, con pendiente m = 0



- Función identidad:

$$f(x) = x$$

Su gráfica es una recta que pasa por el origen de los ejes coordenadas, con pendiente m =1.



A partir de éstas funciones simples se pueden construir muchas de las funciones importantes en cálculo.

- Función polinomial: cualquier función que pueda obtenerse a partir de la función constante y de la función identidad mediante las operaciones de adición, sustracción y multiplicación se llama función polinomial, es decir f es de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

En donde los valores de $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ son constantes (números reales) y $a_n \neq 0$.
n es un entero no negativo y también indica el grado de la función polinomial.

a). **Función lineal** de la forma:

$Ax + By + C = 0$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, (A, B, C son constantes)

Es la ecuación general de la línea recta y su representación gráfica es una línea recta.

En particular $f(x) = ax + b$ es una función de primer grado o función lineal. Cuando se expresa en la forma $y = mx + b$ se le llama a la ecuación pendiente-ordenada al origen.
m representa la pendiente, b es el punto donde corta al eje de las ordenadas (y).

La pendiente se puede calcular si se conocen dos puntos por donde pase la recta $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ entonces:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Conociendo la pendiente y un punto se puede encontrar la ecuación de la línea recta con la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

b) **Función cuadrática** de la forma:

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad \text{con } A \neq 0 \text{ y } C \neq 0$$

Es la ecuación general de segundo grado su representación grafica es una parábola.

La ecuación de una parábola es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Para realizar la gráfica son necesarios tres pasos:

1). Para determinar hacia dónde abre la parábola, es necesario conocer cuál es el signo del coeficiente de x^2.

1.1). Si es positivo la parábola abre hacia arriba, $a > 0$.
1.2). Si el signo es negativo la parábola abre hacia abajo, $a < 0$.

2). El vértice de la parábola, es el punto máximo o mínimo de la parábola, se encuentra utilizando las siguientes expresiones:

$$Vx = \frac{-b}{2a} \quad \text{vértice en } x \qquad ; \qquad Vy = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{vértice en } y$$

3). La parábola siempre corta el eje de las ordenadas, para determinar en donde lo corta se realizan los siguientes pasos:

3.1). Hacer $x = 0$

3.2) Sustituir éste en la ecuación: y = a(0)^2 + b(0) + c = c, entonces la parábola corta el eje de las ordenadas en el punto (0,c).

Ejemplo:

$Y = 3x^2 + 12x$

La parábola abre hacia arriba porque a = 3 > 0.
El vértice se encuentra en el punto (-2, -12).
La parábola corta los ejes en los puntos (0, 0) y (-4, 0).

c) **Función racional**: los cocientes de funciones polinomiales se llaman funciones racionales, por lo tanto, f es una función racional si tiene la forma:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + b_1 x + b_0}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{3}{x-4}$$

Cuando los valores son grandes de *x*, positivos o negativos, los valores de y son pequeños.
Para valores de x cercanos a 4, los valores de *y* son muy grandes, positivos o negativos.
Cuando x toma el valor de cuatro no existe valor de salida (valor funcional) para *y*.

- Función valor absoluto

La función valor absoluto se simboliza como $|x|$ y se define de la siguiente forma:

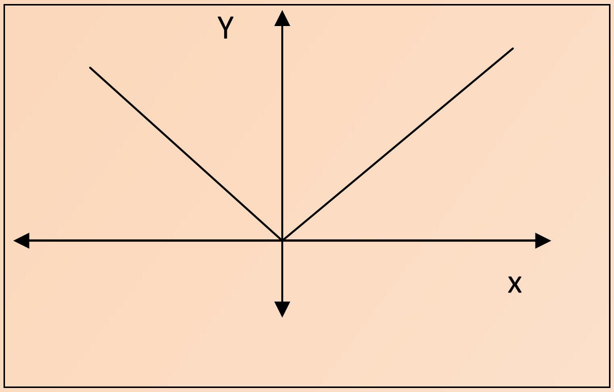
$$f(x) = |x| = \begin{Bmatrix} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{Bmatrix}$$

Lo que significa que $|x|$ trasforma cualquier valor de x en su “idéntico” positivo.

Tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

Gráfica de la función $y = |x|$



➢ Función Raíz

Una función raíz cuadrada de x, se representa como:

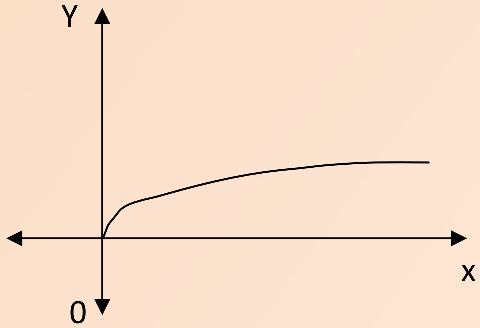
$$f(x) = \sqrt{x}$$

esta función tiene como dominio todos los números positivos $x \geq 0$

Tabla de valores

x	0	1	2	3
y	0	1	1.414	1.732

Gráfica de la función $y = \sqrt{x}$



Función inversa

La inversa de una función f se define como una nueva función g, cuya regla regresa cada valor del contradominio de f a su valor original. A la función g se le llama función inversa de f y se representa como: f^{-1}.

Para que una función f tenga inversa es necesario que ésta sea creciente o decreciente.

Cuando la función es estrictamente creciente debe de cumplir con:
Para todo par de puntos en su dominio x_1, x_2; si $x_1 < x_2$; entonces $f(x_1) < f(x_2)$

Cuando la función es estrictamente decreciente debe de cumplir con:
Para todo par de puntos en su dominio x_1, x_2; si $x_1 < x_2$; entonces $f(x_2) < f(x_1)$

Ejemplo:

1. Encuentre la función inversa $f(x) = \frac{3}{x-4}$

   Se intercambia la x con la y, obteniendo: $f(y) = \frac{3}{y-4}$

   Se despeja y, teniendo como resultado: $f^{-1}(x) = \left(\frac{3}{x}\right) + 4$

   La función es decreciente por lo tanto tiene función inversa

2. Encuentre la función inversa de $y = x^2$

   La función no tiene inversa, porque no es totalmente creciente ni totalmente decreciente, esta función es una parábola.

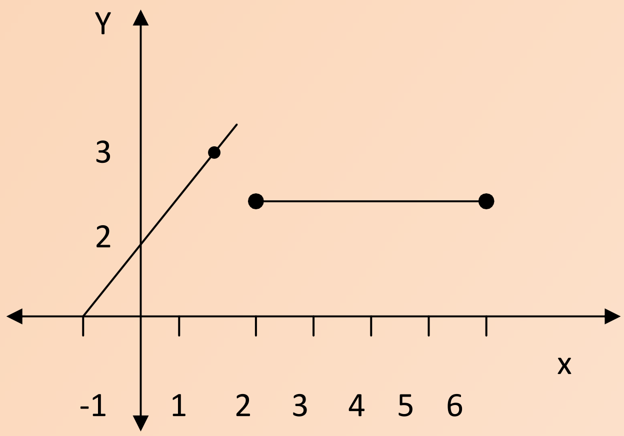
Función por partes

Las funciones por partes (o por trozos) tienen su dominio definido por varios intervalos, para cada uno de éstos existe una regla que permite encontrar su contradominio. Para su análisis es necesario tomar cada parte como una función independiente.

Ejemplo:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x+1, & si\ -1\leq x\leq 2 \\ 2, & si\quad 2\leq x\leq 6 \end{cases}$

Gráfica de la función por partes



Funciones trascendentes

- Función exponencial:

La función exponencial se expresa como:

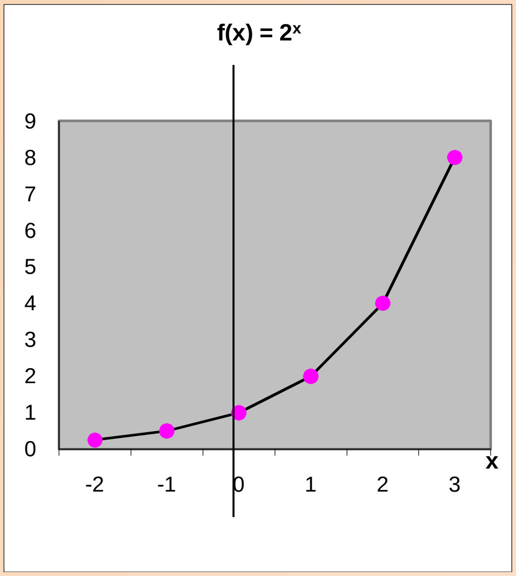
$$f(x) = b^x \quad ;\ si\ \ b > 0 \quad y \quad b \neq 1$$

en donde:
b es la base de una función exponencial
x es el exponente de la función exponencial

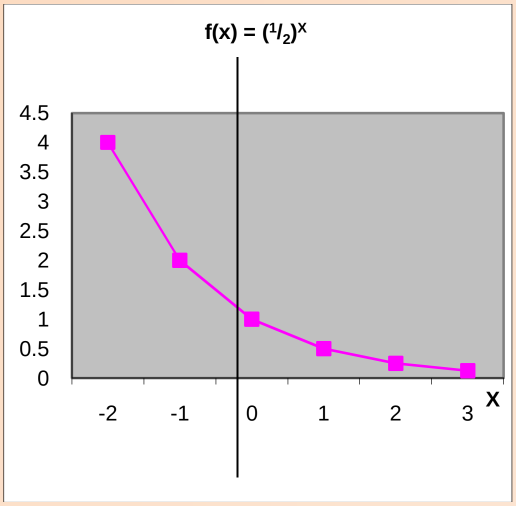
El dominio está formado por todos los números reales $D_f = \{ R\}$

Ejemplo:

1. $f(x) = 2^x$



2. $f(x) = (1/2)^x$



Propiedades de la función exponencial

Si a > 0, b > 0 y x, y elementos de los reales (R) entonces:

Teorema 1

1.1. $a^x \bullet a^y = a^{x+y}$

1.2. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

1.3. $(a \bullet b)^x = a^x b^x$

1.4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

1.5. $\left[\dfrac{a}{b}\right]^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Teorema 2

2.1 $Si\ a > 1, \begin{cases} a^x > 1 \ \ cuando \quad x > 0 \\ a^x < 1 \ \ cuando \quad x < 0 \end{cases}$

2.2 $Si\ a < 1, \begin{cases} a^x < 1, \ \ cuando \quad x > 0 \\ a^x > 1, \ \ cuando \quad x < 0 \end{cases}$

Las leyes de los exponentes facilitan los cálculos de estas funciones.

También dentro de esta función se define la función exponencial natural que tiene como base el número e y es de la forma: $y = e^x$

- Problemas propuestos

Ejemplo:

Se invierten 15 000 pesos a un interés compuesto del 12% anual, calcular el monto después de dos años, si la capitalización es trimestral.

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

$$M = 15000\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{(4)(2)}$$

$$M = 19\,001.55 \quad pesos$$

2. Una máquina se deprecia con el uso, al transcurso de los años la ecuación que representa esta depreciación es la siguiente:

$$D(t) = 18\,000e^{-0.035t}$$

a) Encontrar el valor de desecho después de 10 años.
Solución:

$$D(t) = 18\,000e^{-0.035(10)}$$

$$D(t(= 12{,}684.4 \quad pesos$$

b) Cuál era el valor original de la máquina.
Solución:

$$Para\ t = 0$$

$$D(0) = 18\,000e^{-0.03(0)}$$

$$D(0) = 18\,000$$

- Función logarítmica

La función logarítmica:

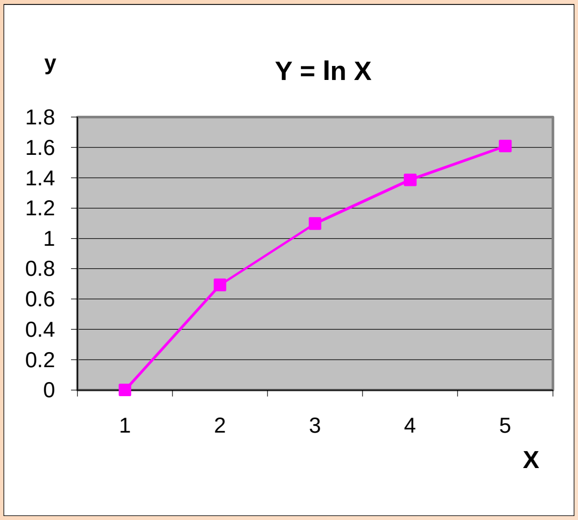
Si $b > 0$ y $b \neq 0$, entonces:

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y \; ; \quad x > 0$$

con el dominio de la función $D_f = \{ R^+ \}$.

$y = \log_b x$ se lee logaritmo de base b de x igual a y

Los cálculos en funciones logarítmicas se facilitan con las leyes de los logaritmos. Dentro de esta función se define la función logaritmo natural que tiene como base al número e y es de la forma: **y = ln x**



- Propiedades de los logaritmos

Logaritmos comunes o de base 10 (briggs), se denotan como **log x**, la base 10 no se escribe. El logaritmo natural (neperiano) de base **e** (e = 2.718281828) se denota como: **ln x.**

LOGARITMO	
Expresión	Nombre
$\log_a a = 1$	Logaritmo de la base
$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$	Cambio de base
Log (a • b) = log a + log b	Producto
$\log (a/b) = \log a - \log b$	Cociente
$\log a^n = n \log a$	Potencia
$\log \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \log a$	Raíz

Estas propiedades se cumplen para logaritmos con cualquier base.
Nota: $\log a^n \neq (\log a)^n = \log^n a$

Ejemplo:

Se cuenta un capital de 2000 pesos invertidos a un interés compuesto anual del 4%. ¿En cuánto tiempo se triplica el capital?

Solución:

$$M = C(1+i)^t$$
$$6000 = 2000\,(1+0.04)^t$$
aplicando log en ambos lados y simplificando :
$$\log\ 3 = (1.04)^t$$
por la propiedad del logaritmo
$$\log 3 = t \log 1.04$$
$$t = \frac{\log 3}{\log 1.04}$$
$$t = 28 \text{ años}$$

- Problemas propuestos

Clasifica cada una de las siguientes funciones:

Función	Respuesta
a) $f(x) = 3x^{1/2} + 1$	raíz
b) $f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}$	racional
c) $f(x) = 3$	constante
d) $g(x) = x^{-2} + 2x^{-1} + 3$	racional
e) $h(x) = (1 + 5x)^{-1/2}$	racional
f) $f(x) = 2^{x-1}$	exponencial
g) $g(x) = \log_4 x^2$	logarítmica

1.3.5 Álgebra de funciones

Sean f y g funciones de dominios D_1 y D_2 respectivamente, entonces:

Suma o resta

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ para toda x que pertenece a D_1 intersección D_2

Multiplicación

$(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$ para toda x que pertenece a D_1 intersección D_2

División

$(f / g)(x) = f(x) / g(x)$, $g(x) \neq 0$, para toda x que pertenece a D_1 intersección D_2

Composición

La composición de f con g se denota como $(f \circ g)(x)$ y se lee f compuesta con g.

$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$ para toda x que pertenece al dominio de g

Ejemplo:

1. Sean las funciones:

$f(x) = x^2 + x - 6$
$g(x) = x^2$
$h(x) = 2x$

Calcular:

Inciso	Operación	Respuesta
1.1	$(f + g)(x) =$	$2x^2 + x - 6$
1.2	$(f / g)(x) =$	$(x^2 + x - 6) / x^2$
1.3	$(f \bullet h)(x) =$	$2x^3 + 2x^2 - 12x$
1.4	$(g / h)(x) =$	$x / 2$
1.5	$(g \circ h)(x) =$	$4x^2$
1.6	$(h \circ g)(x) =$	$2x^2$

1.4 Ecuaciones e Inecuaciones Lineales y Cuadráticas

OBJETIVOS

- Entender los conceptos básicos de las ecuaciones
- Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales y cuadráticas
- Plantear problemas Financiero – Administrativo
- Interpretar los resultados obtenidos
- Resolver sistemas de ecuaciones

CONTENIDO

1.4.1 Conceptos básicos

1.4.2 Solución de ecuaciones de primer grado

1.4.3 Solución de ecuaciones de segundo grado

1.4.4 Solución de inecuaciones de primer grado

1.4.5 Solución de inecuaciones de segundo grado

.1.4.6 Solución de sistema de ecuaciones con dos incógnitas, por el método de determinantes y de reducción

Es importante recordar que al combinar números y variables en operaciones, obtenemos expresiones algebraicas, en donde las variables van a representar números que pertenecen a los números reales.

Para resolver problemas utilizamos el álgebra, y lo primero que debemos hacer es traducir el problema al lenguaje algebraico. También se pueden realizar operaciones básicas con las expresiones algebraicas.

1.4.1 Conceptos básicos

Ecuación. Una ecuación es una proposición que expresa la igualdad de dos expresiones algebraicas. Por lo regular involucra una o más variables. Las expresiones de cada igualdad se llaman miembros de la ecuación.

Ejemplos:

1. $2x - 3 = 9 - x$
2. $2x + y = 7$
3. $\dfrac{3a}{1-r} = S$

Las expresiones de cada igualdad se llaman **Miembros de la ecuación**

El valor de la variable que haga que la ecuación sea una proposición cierta se denomina raíz o solución de la ecuación dada (sólo un valor). Se dice que tal valor de la variable satisface la ecuación.

Ejemplo:

1. 5 es una raíz de la ecuación $2x - 3 = x + 2$

2. -2 es la solución de la ecuación $y^2 + 3y = 6 + 4y$

El proceso para encontrar el valor de la raíz se denomina: resolver la ecuación. Al llevar a cabo este proceso, por lo general se efectúan ciertas operaciones en la ecuación que la transforman en una nueva ecuación más fácil de resolver.
Las siguientes operaciones producen nuevas ecuaciones, al mismo tiempo que cumplen con el requerimiento de no alterar las raíces de la ecuación.

1. **Principio de la adición**. Se puede sumar o restar cualquier constante o expresión que incluya a la variable en ambos lados de la ecuación.
2. **Principio de la multiplicación**. Se puede multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por cualquier constante distinta de cero o cualquier expresión que incluya a la variable con valor distinto de cero.

3. Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos miembros se les extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

Ejemplos:

1. $x - 3 = 2$
   $x - 3 + 3 = 2 + 3$
   $x = 5$ solución única

2. $5x = 15$
   $$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$$
   $x = 3$ solución única

Una clase importante de ecuaciones consta de aquellas denominadas ecuaciones polinomiales. El grado de la ecuación polinomial es la máxima potencia de la variable que aparece en la ecuación.

Ejemplos:

1. $x^4 + 3x^2 - 5x = 4$ ecuación polinomial de cuarto grado
2. $\frac{2x^2}{3} - 1 = 3x + 2$ ecuación polinomial de segundo grado

3. $x + 3y = 2$ ecuación polinomial de primer grado

Una ecuación polinomial de grado uno se denomina ecuación lineal, mientras que una ecuación polinomial de grado dos se llama ecuación cuadrática.

1.4.2 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

La ecuación de la forma:

$$Ax + B = 0, \quad \text{si } A \neq 0$$

En donde A y B son números reales, se le conoce como ecuación lineal, recibe este nombre porque el exponente de la variable (x) es uno.

Ejemplo:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. Sea la ecuación $12x - 10 = 14$

Sumando 10 a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$12x - 10 + 10 = 14 + 10$$

$$12x = 24$$

$$x = 24 \div 12$$

$$x = 2$$

2. Sea la ecuación $3x - 4 (6 - x) = 15 - 6x$

$$3x - 24 + 4x = 15 - 6x$$

$$3x + 4x + 6x = 15 + 24$$

$$13x = 39$$

$$x = \frac{39}{13}$$

$$x = 3$$

- Ecuación con dos variables (ecuación línea recta)

A la ecuación de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Se le conoce como la ecuación general con dos variables.

Cuando una función se expresa en la forma:

$$y = Ax + B$$

Donde A y B son constantes distintas de cero, decimos que es una función lineal.

Así la ecuación de una recta está compuesta principalmente por dos incógnitas *x* y *y*, sin que ninguno de sus términos esté elevado a exponentes diferentes a 1 ó 0. El conjunto solución de p(x, y) = 0 esta formado por los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación.

Ejemplo:

Sea la ecuación $y = 8x + 1$, la cual tiene un conjunto solución infinito (todos los números reales).

Para representarla gráficamente se necesitan por lo menos dos puntos preferentemente que la recta corte al eje de las abscisas y al de las ordenadas.

El corte con el eje de las ordenadas, se le da el valor de cero a x (x = 0) y sustituyendo en la ecuación tenemos:

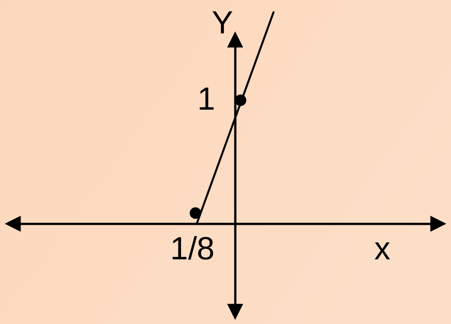
$$y = 8(0) + 1$$
$$y = 1$$

El punto de corte con el eje es p(0,1)

El corte con eje de las abscisas se le da el valor de cero a y (y = 0) y sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$0 = 8x + 1$$
$$x = -1/8$$

El punto de corte con el eje es p(-1/8,0)



1.4.3 Resolución de ecuaciones de segundo grado

Es una ecuación cuadrática la que tiene la forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Donde A, B y C son constantes diferentes de cero.

Existen 3 métodos para resolver una ecuación: el de factorización, completando el cuadrado y empleando la fórmula general. En este caso sólo se verá la resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general.

Si $A \neq 0$, entonces las raíces de la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ se obtienen a través de la siguiente expresión:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante de la ecuación cuadrática se emplea para determinar las raíces de ésta, existiendo tres casos:

a. si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales diferentes.
b. si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una raíz de multiplicidad dos.
c. si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

Ejemplos:

Resolver las ecuaciones:

1. $(2x+3)(3x-1) = -4$

$6x^2 - 2x + 9x - 3 = -4$
$6x^2 + 7x - 3 + 4 = 0$
$6x^2 + 7x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(6)(1)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{(6)(2)}$$

$$x_1 = \frac{-7+\sqrt{25}}{12} = \frac{-7+5}{12} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

$$x_2 = \frac{-7-\sqrt{25}}{12} = \frac{-7-5}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

2. $2x^2 - x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-2)}}{4} = \frac{\mathbf{1 \pm \sqrt{17}}}{\mathbf{4}}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$$

3. $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$$x_{12} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{4}$$

$$x_{12} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{3 + \sqrt{12}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{12}}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{12}}{2}$$

- Aplicaciones de ecuaciones lineales

1. Un comerciante de ganado compró 1000 reses a $150.00 cada una. Vendió 400 de ellas obteniendo una ganancia de 25%. ¿A qué precio deberá vender las restantes 600, sí la utilidad promedio del lote completo ha de ser del 30%?

   La ganancia es de: (150) (0.25) = $ 37.50
   La ganancia total es de: ($ 37.50) (400) = $15000

   Sea "x" el precio de venta de la 600 reses restantes, entonces x – 150 es la utilidad por res, la ganancia por las 600 reses es 600 (x – 150)
   La ganancia total por la venta completa es: 15000 + 600 (x – 150)

   La ganancia deberá ser el 30% del precio que pagó por la 1000 reses, esto es
   1000 x 150 x 0.30 = 45000, entonces:

   $$15000 + 600 (x - 150) = 45000$$
   $$15000 + 600x - 90000 = 45000$$
   $$600x = 45000 + 90000 - 15000$$
   $$x = \frac{120000}{600}$$
   $$x = 200$$

   El comerciante debe vender las reses restantes a $200.00 cada una para lograr una ganancia del 30%.

2. Una persona va a invertir $70000. Esta persona desea recibir un ingreso mensual de $5000. Puede invertir sus fondos en bonos del gobierno a un 6% o con un riesgo

mayor al 8.5% de los bonos hipotecarios. ¿Cómo deberá invertir su dinero de tal modo que minimice los riesgos y obtenga $ 5000?

Sea x cantidad invertida en bonos del gobierno.
Sea (70000 – x) cantidad invertida en bonos hipotecarios.

El ingreso percibido por los bonos del gobierno es 0.06x.
El ingreso percibido por los bonos hipotecarios es 0.085(70000 –x).

Entonces:

$$0.06x + 0.085(70000 - x) = 5000$$

$$-0.025x = 5000 - 5950$$

$$x = \frac{-950}{-0.025}$$

$$x = 38\,000$$

La persona deberá invertir $38000 en bonos del gobierno y $ 32000 en bonos hipotecarios.

Ejercicios propuestos de ecuaciones lineales y cuadráticas

- Lineales

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $3 - 2(1 - x) = 5 + 7(x - 3)$
2. $1 - 2[4-3(x + 1)] = 4(x - 5) - 1$
3. $\frac{3x+7}{2} = \frac{1+x}{3}$

Respuestas:

1. X = 17/ 5
2. X = -10
3. X = -19/ 7

- Cuadráticas

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 3x + 1 = 0$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
2. $x^2 - 7x + 12 = 0$ $\qquad x_{1,2} = 3,4$
3. $5x(x + 2) + 6 = 3$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{10}}{5}$

4. Un comerciante de autos usados compra 2 automóviles en $290 000. Vende uno con una ganancia de 10% y el otro perdiendo 5% y aún obtuvo una ganancia de $ 185 por la transacción completa. Encuentra el costo de cada automóvil.

R. $220 000 y $70 000

1.4.4 Solución de inecuaciones de primer grado

Una inecuación es una proposición de orden sobre una variable real, también es llamada desigualdad.

Ejemplo:

1. $2x^2 - 1 < x$
2. $3x^2 y^2 + xy > 0$

La solución de una inecuación de una variable, es el conjunto de todos los valores de la variable para los cuales la desigualdad es una proposición verdadera.

Hay dos operaciones básicas que se utilizan en el manejo de las inecuaciones, las cuales son:

1. Cuando el mismo número real se suma o se resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la inecuación no se altera.
2. El sentido de la inecuación se preserva si ambos lados se multiplican o dividen por el mismo número positivo, y se invierte cuando se multiplican o dividen por el mismo número negativo.

Ejemplos:

1. Es claro que 8 > 5 es una proposición verdadera. Si sumamos 4 ambos lados: Obtenemos 8 + 4 > 5 + 4 ó 12 > 9, que sigue siendo una proposición verdadera. Sí restamos 7 a ambos lados obtenemos 8 – 7 > 5 – 7 ó 1 > -2, continua siendo verdadera.

2. Sabemos que 4 > -1 es una proposición verdadera. Si multiplicamos ambos lados por 2, obtenemos 8 > -2 que aún es válida. Pero sí multiplicamos por (-2). Se debe invertir el sentido de la desigualdad, es decir, (-2) (4) < (-2) (-1) ó -8 < 2, que de nuevo es válida.

Una inecuación lineal de una variable es de la forma: ax + b > 0 (<0).

Donde a y b son constantes, siendo a diferente de cero.

Ejercicios:

1. Encuentra todos los números reales que satisfacen la inecuación:

$$3x + 7 > 5x - 1$$
$$3x - 5x > -1 - 7$$
$$-2x > -8$$

Dividimos ambos lados entre –2 y cambiamos el sentido de la desigualdad

$$x < \frac{8}{2}$$

La solución consta del conjunto de números en el intervalo $(-\infty, 4)$

$$x < 4$$

2. Resuelva la inecuación:

$$y+\frac{3}{4}<\frac{5y-2}{3}+1$$

$$12y+\frac{12(3)}{4}<\frac{12(5y-2)}{3}+12$$

$$12y+9<20y-8+12$$

$$-8y<-5$$

Dividir ambos lados entre –8 e invertir el sentido de la desigualdad se tiene:

$$y>\frac{5}{8}$$

El conjunto solución está en el intervalo (5/8, ∞) .

3. Un fabricante de calculadoras puede vender cada una a $90, gasta en materia prima $50 y tiene costos fijos de $ 5800 a la semana. ¿Cuántas calculadoras debe vender para obtener una utilidad de por lo menos $2000 a la semana?

x es el número de artículos producidos y vendidos.

El costo es: C(x) = 50x + 5800
El ingreso I(x) = 90x
La utilidad U(x) = I(x) – C(x)

$$90x - 50x - 5800 \geq 2000$$
$$x \geq 195$$

El fabricante debe producir y vender por lo menos 195 calculadoras para obtener la utilidad deseada.

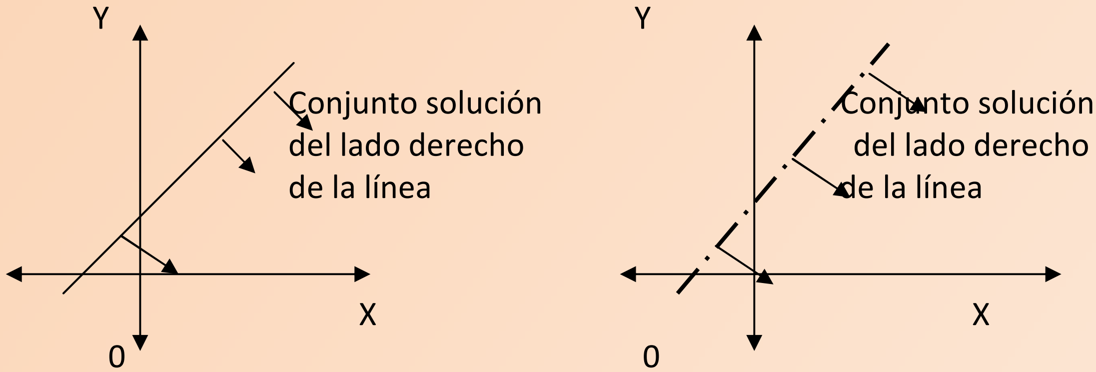
- Ejercicios propuestos:

5(x-3) –8x > 7 (3x+1) R.= x < -11/12
3(3x-2) < 7x –5 R.= x < 1/2
–14 < 3z –5 < 4 R.= -3 < z < 3

SISTEMA DE INECUACIONES

Las inecuaciones de dos variables se define como una pareja ordenada (a, b) que dan un enunciado verdadero cuando x y y son sustituidas por a y b. El conjunto solución del sistema se denotan como: $\{(x, y): y < 2x + 4\}$.
Si cada una de las inecuaciones es un polinomio de primer grado se le conoce como inecuaciones lineales y su gráfica representa la totalidad de soluciones (parejas ordenadas) que satisfacen a éstas.
En el eje cartesiano a la región que incluye a todas las parejas del conjunto solución se le llama semiplano figura 1.4.4.1. Cuando la recta está incluida se le llama semiplano cerrado, figura 1.4.4.1 (a), y si no incluye a la recta se llama semiplano abierto, figura 1.4.4.1 (b).

Figura 1.4.4.1



(a) (b)

Teorema 1

a. La gráfica de la inecuación $y < f(x)$ es el conjunto de puntos que están por debajo de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.
b. La gráfica de $y > f(x)$ es el conjunto de puntos que están por encima de la gráfica de $y = f(x)$.

Teorema 2

a. La gráfica de la inecuación $x < g(y)$ es el conjunto de puntos que están a la izquierda de la gráfica de la ecuación $x = g(y)$.

b. La gráfica de $x > g(y)$ es el conjunto de puntos que están a la derecha de la gráfica[9] de $x = g(y)$

Ejemplo:

Encontrar la solución y trazar la gráfica del sistema

1. $x + y \leq 4$
   $2x - y \leq 4$

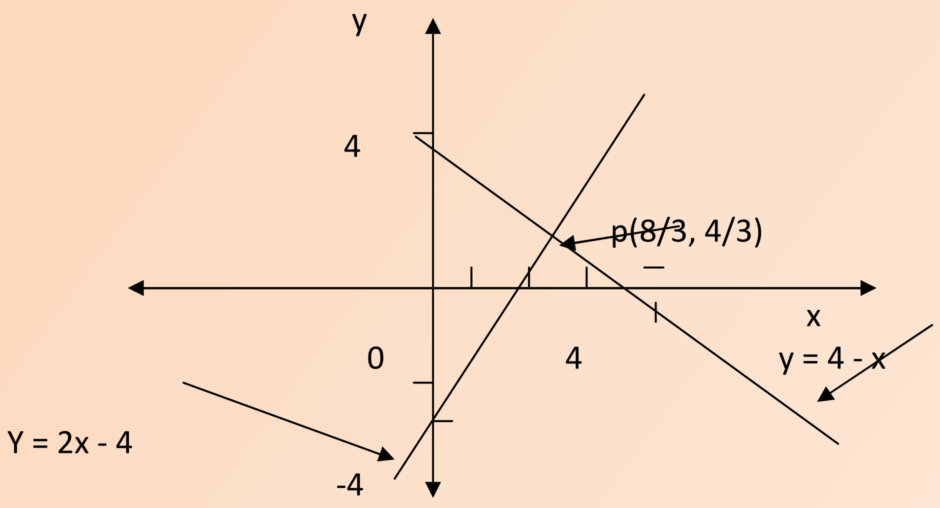
Solución:

Primero convertimos las inecuaciones en igualdades

$$x + y = 4$$
$$2x - y = 4$$

Construir la gráfica de las inecuaciones

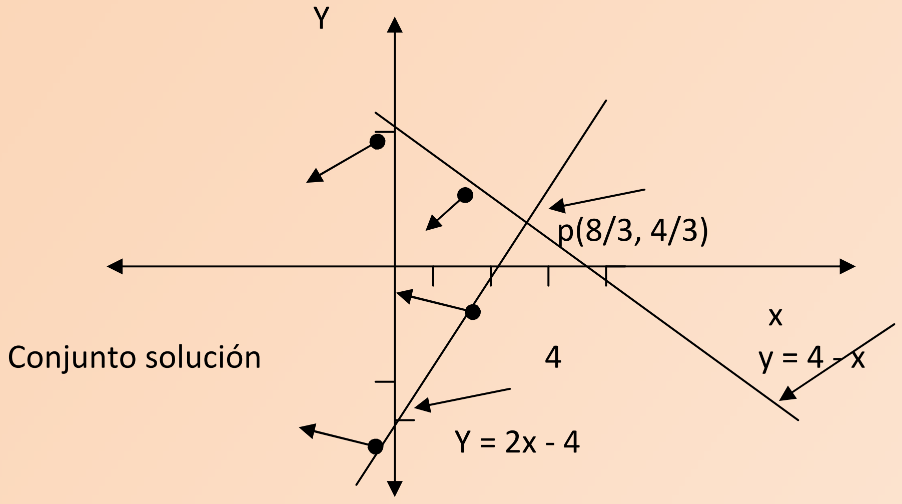
Figura 1.4.4.2



[9] Swokowski, E. W. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, Segunda Edición, 1988, págs. 460 y 461.

Encontramos el punto de intersección (8/3, 4/3).
La gráfica $x + y \leq 4$ incluye los puntos de la recta $y = 4 - x$, así como los puntos que están por debajo de la recta.
La gráfica $2x - y \leq 4$ incluye los puntos de la recta $y = 2x - 4$, así como los puntos que están por encima de la recta.

Figura 1.4.4.3



2. Un fabricante está tratando de decidir sobre las cantidades de producción para dos artículos: mesas y sillas. Con 96 unidades de material y con 72 horas de mano de obra, cada mesa requiere 12 unidades de material y 6 horas de mano de obra. Por otra parte las sillas usan 8 unidades de material y 12 horas de mano de obra. El fabricante prometió construir por lo menos dos mesas. Plantear las inecuaciones, graficar e indicar el conjunto solución.

Solución:

X – Mesas
Y – Sillas

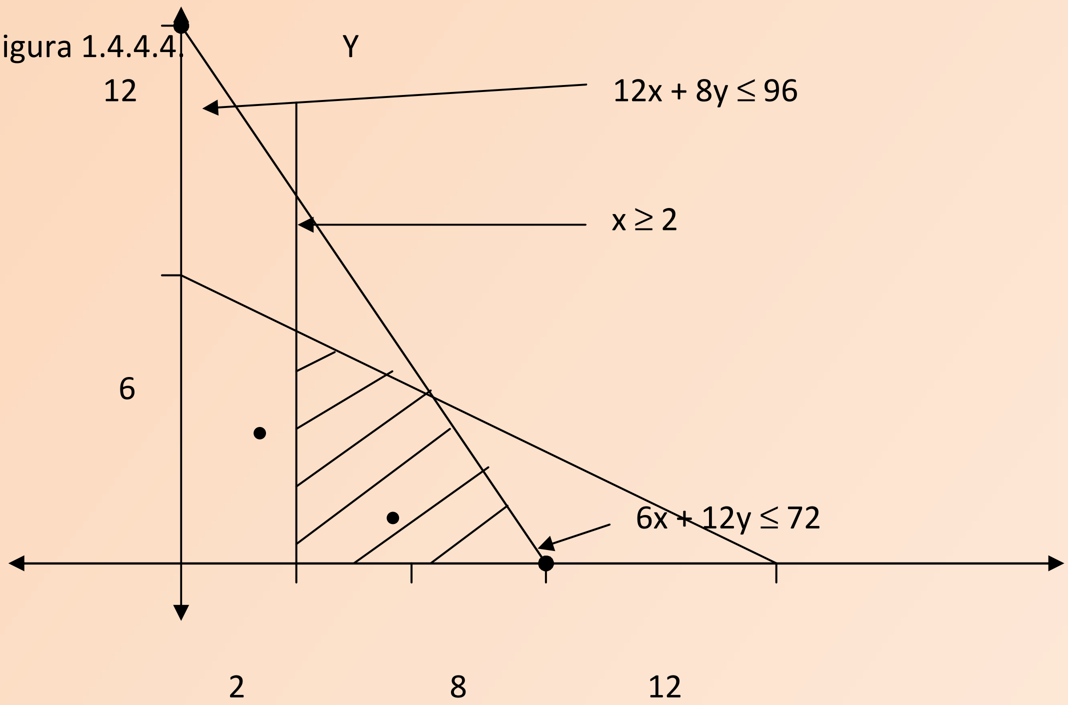
Clase / Producción	x	y	TOTAL
Materia prima (unidades)	12	8	96
Mano de obra (horas)	6	12	72

$$12x + 8y \leq 96 \qquad (1)$$
$$6x + 12y \leq 72 \qquad (2)$$
$$x \geq 2 \qquad (3)$$
$$x, y \geq 0 \qquad (4)$$

Puntos de intersección con los ejes:

- para la ecuación (1) $P_1(0,12)$ y $P_2(8,0)$
- para la ecuación (2) $P_1(0,6)$ y $P_2(12,0)$
- para la ecuación (3) x = 2

Figura 1.4.4.4.



- Ejercicios propuestos

Encontrar el conjunto solución y trazar la gráfica de los siguientes sistemas:

1. $2x + y \leq 8$
   $x - (½)y \leq 2$

2. $x + y \leq 4$
   $2x - y \leq 4$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

3. Un comprador está tratando de seleccionar 2 alimentos, se deben cumplir ciertas necesidades diarias de vitaminas, los requerimientos vitamínicos son por lo menos de 40 unidades de vitamina C, 50 unidades de vitamina D y 49 unidades de vitamina E. Cada kilo de alimento A proporciona 4 unidades de vitamina C, 10 unidades de D y 7 unidades de E y cada kilo de alimento B proporciona 10 unidades de vitamina C, 5 unidades de vitamina D y 7 unidades de E. Plantear las inecuaciones, graficar e indicar el conjunto solución.

1.4.5 Solución de inecuaciones de segundo grado

Una inecuación cuadrática de una variable, es de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (<0)$$

donde a, b y c son constantes y a diferente de cero.

Para resolver desigualdades donde intervengan polinomios de grado mayor de 1, se usa el siguiente teorema[10].

Sea $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$ un polinomio, si los números reales c y d son soluciones sucesivas de la ecuación.

Cuando x está en el intervalo abierto (c,d) todos los valores de polinomios son positivos o bien todos son negativos.

La frase *soluciones sucesivas c y d* significa que no hay otras soluciones entre c y d[10].

Ejemplo:

1. Resuelve la inecuación $x^2 + 3x < 4$

Primero revisamos que la inecuación se pueda factorizar, esto es, escribiéndola como el producto de dos factores lineales y examinados entonces los signos de los dos factores.

$$x^2 + 3x - 4 < 0$$
$$(x - 1)(x + 4) < 0$$

Se requiere que el producto de ambos factores sea negativo porque la desigualdad es menor que cero. Uno de estos factores debe ser positivo mientras que el otro debe ser negativo. Se examinan los signos de estos dos factores.

$x - 1 > 0$ entonces $x > 1$
$x - 1 < 0$ entonces $x < 1$

$x + 4 > 0$ entonces $x > -4$
$x + 4 < 0$ entonces $x < -4$

El intervalo solución es $(-4, 1)$

De acuerdo con la siguiente gráfica, en el intervalo $-4 < x < 1$ en el cual se tiene un factor positivo y el otro negativo, de modo que el producto $(x - 1)(x + 4)$ es negativo.

[10] Swokowski E. W. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica,* México, Grupo Editorial Iberoamérica, Segunda Edición, 1988, pág. 99.

(x –1) ---0+++++++
(x + 4) --------0++++++++++++++++++++++++++++

-4 0 1

En caso de que la inecuación no se pueda factorizar, será necesario utilizar la fórmula general de segundo grado para encontrar las raíces y proceder a su solución.

2. Resuelva la inecuación:

$$(3x - 1)(x + 2) > 0$$

Se requiere que el producto sea positivo, porque la inecuación es mayor que cero; los dos factores deben ser positivos o negativos.

$3x - 1 > 0$ entonces $x > 1/3$
$3x - 1 < 0$ entonces $x < 1/3$

$x + 2 > 0$ entonces $x > -2$
$x + 2 < 0$ entonces $x < -2$

(3x – 1) ---0+++++++++++

(x + 2) --------0++++++++++++++++++++++++++++

- 2 0 1/3

Podemos observar que ambos factores son positivos para $x > 1/3$ y ambos son negativos para $x < -2$, por lo tanto el producto $(3x - 1)(x + 2) > 0$. Si $x > 1/3$ y $x < -2$. La solución de la inecuación consiste de la unión de los dos intervalos, es decir: $(-\infty, -2) \cup (1/3, \infty)$.

3. Un fabricante desea vender x unidades de un producto al precio **p** pesos por unidad, si **p** = 150 – x. ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener ingresos mínimos de $5600?

$$I(x) = x\,p$$

$$x(150 - x) \geq 5600$$

$$-x^2 + 150x - 5600 \geq 0$$

multiplicando por –1

$$x^2 - 150x + 5600 \leq 0$$

$$(x - 80)(x - 70) \leq 0$$

resolviendo la inecuación:

La solución es (70,80), esto significa que debe de vender entre 70 y 80 unidades para obtener utilidades de $5600.

4. Las ventas mensuales x de cierto artículo cuando su precio es **p** pesos están dadas por **p** = 200 **-** 3x. El costo de producir x unidades del mismo artículo es C(x) = (650 + 5x) pesos.
   ¿Cuántas unidades de este artículo deberán producirse y venderse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos de $2500?

Solución:
El ingreso (I) expresado en pesos obtenido por vender x unidades al precio de **p** pesos por unidad es:

$$I(x) = x\mathbf{p}$$
$$= x\,(200 - 3x)$$
$$= 200x - 3x^2$$

Por otro lado:
Costo $\qquad C(x) = 650 + 5x$
Utilidad $\qquad U(x) = I(x) - C(x)$

Entonces:

$$U = 200x - 3x^2 - 650 - 5x$$
$$= -3x^2 + 195x - 650$$

Como $U(x) \geq 2500$ se tiene:

$$-3x^2 + 195x - 650 \geq 2500$$
$$-3x^2 + 195x - 650 - 2500 \geq 0$$
$$-3x^2 + 195x - 3150 \geq 0$$

Dividimos todo entre –3 y cambiamos el sentido de la desigualdad

$$x^2 - 65x + 1050 \leq 0$$

Factorizamos $(x - 30)(x - 35) \leq 0$

Resolviendo se tiene que: $30 \leq x \leq 35$

Para obtener una utilidad de al menos de 2,500 pesos al mes, el fabricante debe producir y vender entre 30 y 35 unidades.

- Ejercicios propuestos:

1. $3x^2 + 5x - 8 < 0$ R. = $(-8/3, 1)$
2. $x^2 - 8x+16> 0$ R. = $x = 4$
3. $3x^2 +13x -10 < 0$ R. = $(-5, 2/3)$
4. Un fabricante puede vender todas las unidades de un producto a $25.00 cada una. El costo C(x) en pesos de producir x unidades cada semana está dado por $C(x) = 3000 + 20x - 0.1x^2$. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana para obtener alguna utilidad?

   R. Más de 150 unidades .

1.4.6 Solución de sistemas ecuaciones con dos incógnitas, por el método de determinantes

Cuando tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, cada una de ellas representa una recta en el plano, resolverlas simultáneamente las dos ecuaciones significa encontrar una pareja (x, y) que satisfaga a ambas ecuaciones.

Geométricamente, significa encontrar un punto del plano que satisfagan a ambas rectas, es decir, significa encontrar dónde se cortan las rectas, si lo hay.

Dos rectas en el plano R^2 se pueden:

- Cruzan en un punto y tener una solución única.
- Estar sobre puestas, representar la misma recta y tener una infinidad de soluciones.
- Ser paralelas, no se cruzarse en ningún punto y no tener solución.

Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden tener:

- Una única solución.
- Una infinidad de soluciones.
- Y no tener una solución.

Sistema de ecuaciones con dos incógnitas por el método de determinantes

Un determinante de orden 2 está definido por la expresión siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Ejemplos:

Evalúa los siguientes determinantes.

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2(5) - (-3)(4) = 10 + 12 = 22$
2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$

¿Cómo se puede resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas por el método de determinantes?
Sea el sistema de ecuaciones el siguiente:

3x - 2y = -2-----------(1)
2x - y = 20-----------(2)

Calculamos primero el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (2)(-2) = -3 + 4 = 1$$

Calculamos el valor de x sustituyendo los valores de la primera columna del determinante del sistema por los valores de los términos independientes de las ecuaciones y de manera similar se hace con la segunda columna para calcular el valor de y, dividimos el determinante de x y y entre el determinante del sistema, respectivamente.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 20 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{(-2)(-1) - (20)(-2)}{1} = \frac{2 + 40}{1} = 42$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 20 \end{vmatrix}}{1} = \frac{(3)(20) - (2)(-2)}{1} = \frac{60 + 4}{1} = 64$$

Las raíces del sistema son: **x = 42**   **y = 64**

Sustituimos los valores obtenidos de x, y en el sistema de ecuaciones para comprobar que los resultados obtenidos son correctos:

3x - 2y =3(42) – 2(64) = **-** 2
2x - y =2(42) - 64 = 20

Resolver el siguiente sistema, utilizando determinantes:

5x + 6y = -10---------(1)
2x + 3y = -1-----------(2)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} \mathbf{= 15 - 12 = 3}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-30+6}{3} = \frac{-24}{3} = -8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-5+20}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

Las raíces del sistema son: **x = - 8** **y = 5**

Sustituimos los valores obtenidos de x, y en el sistema de ecuaciones para comprobar que los resultados obtenidos son correctos:

5x + 6y = 5(-8) +6(5) = -10
2x +3y = 2(-8) + 3(5) = -1

- Ejercicios Propuestos:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.

$$\frac{w}{4} - \frac{z}{5} = 2$$

$$\frac{w}{6} - 2z = -4$$

R. = w = 72/7 y z = 20/7

2.

5x +9y = -18
6x + 8y = -2
R = x = 9 y y = -7

- Método de reducción (suma o resta)

En este método consiste en igualar los coeficientes de una de las variables del sistema de ecuaciones, de modo que al sumar las dos ecuaciones se elimina dicha variable.

Del siguiente sistema de ecuaciones, encontrar el conjunto solución:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 20 \qquad (1) \\ 4x - 3y &= -23 \qquad (2) \end{aligned}$$

Como primer paso se debe de igualar los coeficientes de y en ambas ecuaciones, porque es lo más sencillo.
El m.c.m. de los coeficientes de y , 6 y 3, es 6.
Multiplicamos la segunda ecuación por 2 porque 2 x 3 = 6, se tiene:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 20 \\ 8x - 6y &= -46 \end{aligned}$$

Como los coeficientes de y que hemos igualado tienen signos distintos, se suman estas ecuaciones porque con ello se elimina la y:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 20 \\ 8x - 6y &= -46 \\ \hline 13x \quad &= -26 \\ x = \frac{-26}{13} &= -2 \end{aligned}$$

Sustituir el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones, en este caso seleccionamos la ecuación (1), se tiene:

$$5(-2)+6y=20$$
$$-10+6y=20$$
$$6y=30$$
$$y=5$$

$$R.\quad .x=2,\quad y=5$$

- Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x+4y-\ z &= \ \ 6 \qquad (1)\\ 2x+5y-7z &= -9 \qquad (2)\\ 3x-2y+\ z &= \ \ 2 \qquad (3) \end{aligned}$$

Seleccionamos las ecuaciones (1) y (2) y vamos a eliminar la x, multiplicando la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por –1.

$$\begin{aligned} \mathbf{2x+8y-2z} &\mathbf{=12}\\ \mathbf{-2x-5y+7z} &\mathbf{=9}\\ \hline \mathbf{3y+5z} &\mathbf{=21} \qquad \mathbf{(4)} \end{aligned}$$

Combinando la (3) con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas. Vamos a combinarla con la ecuación (1) para eliminar x, multiplicando (1) por 3 y la ecuación (3) por –1.

$$\begin{aligned} \mathbf{3x+12y-3z} &\mathbf{=18}\\ \mathbf{-3x+2y-z} &\mathbf{=-2}\\ \hline \textbf{\textit{res tando}} \qquad \mathbf{14y-4z} &\mathbf{=16}\\ \textbf{\textit{dividiendo entre dos}} &\\ \mathbf{7y-2z} &\mathbf{=8} \qquad \mathbf{(5)} \end{aligned}$$

Tomamos las dos ecuaciones con dos incógnitas que se han obtenido (4) y (5) y se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3y + 5z &= 21 \qquad (4) \\ 7y - 2z &= \ \ 8 \qquad (5) \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema eliminando a z al multiplicar la ecuación (4) por dos y la ecuación (5) por 5:

$$\begin{aligned} 6y + 10z &= 42 \\ \underline{35y - 10z} &\underline{= 40} \\ 41y \qquad &= 82 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo y=2 en la ecuación (5) se tiene:

$$\begin{aligned} 7(2) - 2z &= 8 \\ 14 - 2z &= 8 \\ -2z &= -6 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Sustituyendo y = 2, z = 3 en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para este caso se selecciona la ecuación (1), y se tiene:

$$\begin{aligned} x + 4(2) - 3 &= 6 \\ x + 8 - 3 &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Comprobación:

Los valores de x = 1, y = 2, z = 3 deben de satisfacer las tres ecuaciones del sistema. Al sustituir los valores de las variables en cada una de las ecuaciones del sistema se convertirán en identidades[10].

---

[10] A. Baldor, *Algebra elemental,* México, Cultural Mexicana, S.A. 1999, págs. 323, 325, 341y 343.

- Problemas propuestos

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.
$$8x-5=7y-9$$
$$6x=3y+6$$
$$R. \qquad x=3, \quad y=4$$

2.
$$x-1=2(y+6)$$
$$x+6=3(1-2y)$$
$$R. \qquad x=9, \quad y=-2$$

3.
$$2x+y-3z=-1$$
$$x-3y-2z=-12$$
$$3x-2y-z=-5$$
$$R. \qquad x=1, \quad y=3, \quad z=2$$

4.
$$2x+3y+z=1$$
$$6x-2y-z=-14$$
$$3x+y-z=1$$
$$R. \qquad x=-2, \quad y=3, \quad z=-4$$

- Problemas de Aplicación[11]

Para un fabricante de relojes el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de $150 y los costos fijos son de $ 20000 al día, si vende cada reloj a $200. ¿Cuántos relojes deberán producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

---

[11] Problemas tomados con modificaciones del libro Jagdish C., Arya Robin y W. Larder, *Matemáticas Aplicadas a la Economía y a la Administración, México,* Prentice, Tercera Edición, 1992.

Solución:

Sea x el número de relojes producidos y vendidos cada día. El costo total de producir x relojes es

$$y_c = \text{costos variables} + \text{costos fijos} = 150x + 20000$$

dado que cada reloj se vende a \$200, el ingreso I obtenido por vender x relojes es

$$I = 200x$$

El punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir,

$$200x = 150x + 20000$$

Obtenemos que $50x = 20000$ ó $x = 400$.

Se deben de producir y vender al día 400 relojes para garantizar que no haya ni utilidades ni pérdidas.

Punto de equilibrio de mercado

La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, en donde p es el precio y x es la cantidad de demanda. La oferta está dada por $p = x + 7$ ¿Cuál es el precio y la cantidad del punto de equilibrio?

Solución:

El precio y la cantidad del punto de equilibrio son los valores positivos de p y x que satisfacen a la vez las ecuaciones de la oferta y la demanda.

$$p^2 + x^2 = 169 \qquad (1)$$
$$p = x + 7 \qquad (2)$$

Sustituyendo el valor de p de la ecuación (2) en la ecuación (1) y simplificando:

$$(x+7)^2 + x^2 = 169$$
$$2x^2 + 14x + 49 = 169$$
$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

Factorizando encontramos que:

$$(x+12)(x-5) = 0$$

Lo cual da x = -12 ó 5. El valor negativo de x es inadmisible, de modo que x = 5 es el correcto.

Sustituyendo x = 5 en la ecuación (2), se tiene:

$$P = 5 + 7 = 12$$

En consecuencia el precio de equilibrio es 12 y la cantidad de equilibrio es 5.

Modelo de costo lineal

El costo de procesar un kilo de granos de café es de $0.50 y los costos fijo por día son de $300.

a) Encuentra la ecuación de costo lineal y dibuja su gráfica.
b) Determina el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día.

Solución:

Si y_c representa el costo de procesar x kilos de granos de café por día, entonces se emplea la siguiente expresión:

Modelo lineal

Costo total = costo variable total + costos fijos

$$y_c = mx + b \qquad (1)$$

La ecuación (1) es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuyo costo fijo es la ordenada al origen.

En este caso m = \$0.50 y b = \$ 300, por tanto:

$$y_c = 0.5x + 300 \qquad (2)$$

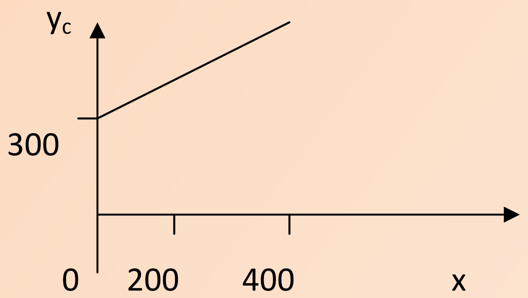
Para dibujar la gráfica primero encontramos dos puntos sobre ella. Haciendo x = 0 en la ecuación (2), tenemos que y = 300, haciendo x = 200 en la ecuación (2), tenemos que $y_c = 0.5(200) + 300 = 400$. De modo que dos puntos que satisfacen la ecuación (2) de costo son (0,300) y (200,400). Graficando estos puntos y uniéndolos mediante una línea recta, obtendremos la gráfica que aparece en la gráfica 1.4.3.

b) Sustituyendo x =1000 en la ecuación (2), obtendremos

$$y_c = 0.5(1000) + 300 = 800$$

En consecuencia el costo de procesar l000 kilogramos de café al día será de \$800.

Gráfica 1.4.3



Modelo de Costo Lineal

El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de $35000, mientras que cuesta $60000 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación entre el costo total y_c de producir x máquinas de escribir al día y dibuje su gráfica.

Solución:

Se nos dan los puntos (10,35000) y (20,60000) que están sobre la grafica del modelo lineal, la pendiente de la línea que une estos dos puntos es:

$$m = \frac{60000 - 35000}{20 - 10} = \frac{25000}{10} = 2500$$

Empleando la fórmula de punto-pendiente:

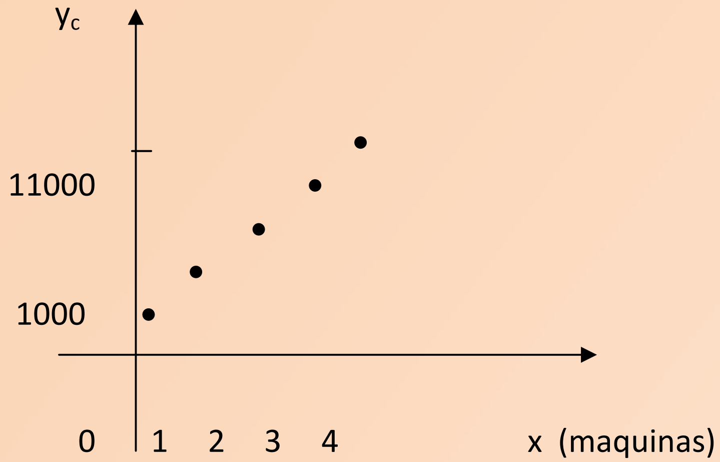
$$\begin{aligned} & y - y_1 = m(x - x_1) \\ & y_c - 35000 = 2500(x - 10) = 2500x - 25000 \\ & y_c = 2500x + 1000 \end{aligned}$$

Tabla 1.4.4

X	0	1	2	3	4
y_c	1000	3500	6000	8500	11000

La gráfica de la ecuación (3) no es una línea recta continua porque x no puede tomar valores fraccionarios al representar el número de máquinas de escribir producidas. La variable x sólo puede tomar valores enteros 0,1,2,3, ...

Gráfica 1.4.4



Depreciación Lineal

Una empresa compra maquinaria por $150000, se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con valor de desecho de cero. Determine la cantidad de depreciación por año y una fórmula para el valor depreciado después de x años.

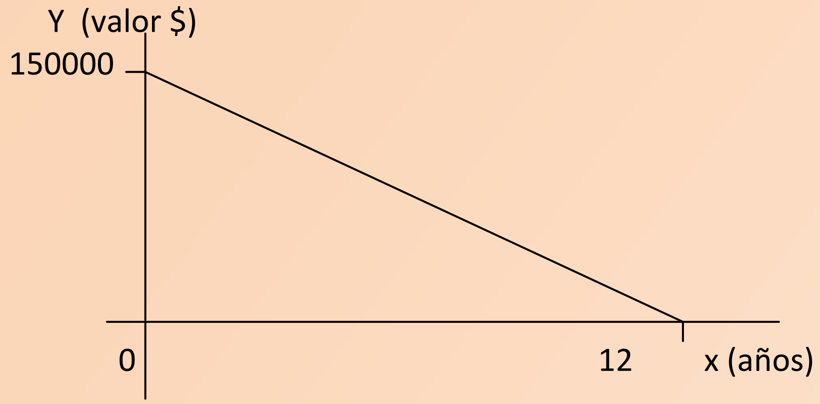
Solución:

Tasa de depreciación (por año) = (valor inicial - valor de desecho) ÷ (vida útil en años)

Depreciación por año = (precio de adquisición inicial) ÷ (vida útil en años)
= $150 000 ÷ 12 años
= $12 500

Valor después de x años = (valor inicial) – (depreciación por año)(número de años)
y = $150 000 – ($12 500 por año)(x años)
y = $150 000 – 12 500x

Gráfica 1.4.5



Demanda

Un comerciante puede vender 20 paquetes de rastrillos al día al precio de $25 cada uno, pero puede vender 30 si les fija un precio de $20 a cada paquete. Determinar la ecuación de demanda.

Solución:

x la cantidad de demanda
y el precio **p** por unidad

$x = 20, \quad p = 25 \qquad y \qquad x = 30, \quad p = 20$

La pendiente de la línea recta de demanda es:

$$m = \frac{20-25}{30-20} = \frac{-5}{10} = -0.5$$

La ecuación de la demanda se encuentra a partir de la ecuación general de la línea recta.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

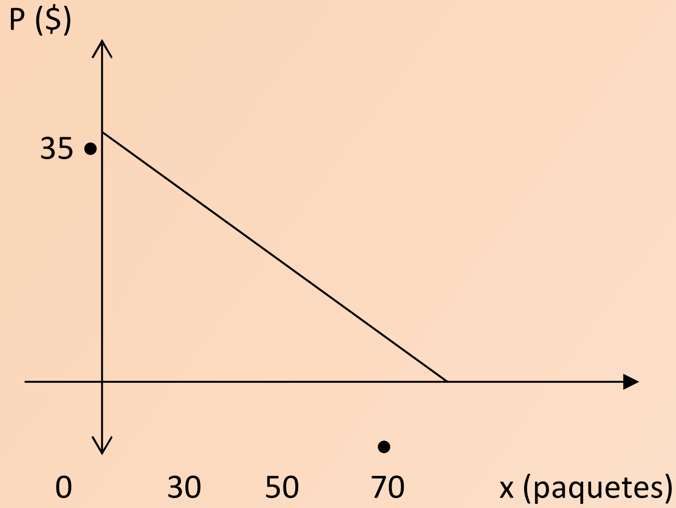
si m= -0.5

$$p - 25 = -0.5(x-20)$$

La ecuación de demanda es:

$$p = -0.5x + 35$$

Gráfica 1.4.5



Interés

El licenciado Álvarez cuenta con un capital de \$35000. Parte de este dinero lo invierte en una cuenta de ahorro que le paga el 8% de interés simple y el dinero restante lo invierte en un negocio que produce el 12% de interés simple. ¿Qué cantidad debe invertir en cada caso para obtener una ganancia del 11% sobre su dinero después de un año?

Solución:

Sea x la cantidad invertida en la cuenta de ahorros al 8% y \$35000 – x la cantidad de dinero invertido en el negocio al 12%.

El interés obtenido por la cuenta bancaria es:

$$I = Cnt = x(0.08)(1) = 0.08x \qquad (1)$$

El interés obtenido por la inversión en el negocio es:

$$I = Cnt = (35000 - x)(0.12)(1) = 0.12(35000 - x) \qquad (2)$$

El interés recibido por las dos al 11% (el total) es:

$$I = 0.11(35000) \qquad (3)$$

Sumando la ecuación 1 y 2 e igualando el resultado de estas con la ecuación 3 se tiene:

$$0.08x + 0.12(35000 - x) = 0.11(35000) \qquad (4)$$

Despejando x

$$-0.04x = -350$$

$$x = 8750$$

La interpretación de este resultado es: En la cuenta de ahorros se depositan $8750.

De la ecuación 2 tenemos:

$$35000 – x = 35000 – 8750$$

despejando x

$$x = 26250$$

La interpretación de este resultado es: La inversión en el negocio es de $26250.

Tema 2 MATRICES

2. Matrices

OBJETIVOS

- Aprenderá la notación de matrices
- Identificará diferentes tipos de matrices
- Podrá sumar y restar matrices
- Obtendrá el producto de una matriz A por una matriz B
- Calculará la inversa de una matriz
- Resolverá un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan

CONTENIDO

2.1 Matrices
2.2 Dimensión de una matriz
2.3 Tipo de matrices
2.4 Operaciones con matrices
2.5 Matriz inversa
2.6 Método de matriz aumentada (Gauss–Jordan)

El álgebra de matrices es una rama de las matemáticas que se utiliza para analizar los sistemas de ecuaciones lineales, cuando éstos tienen un número de ecuaciones superiores a tres.

2.1 Matriz[12]

- Definición de Matriz

La matriz es un arreglo rectangular de elementos ordenados en **m** filas y **n** columnas.

La forma general de una matriz A es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz está constituida por elementos a_{ij}

Los elementos de una matriz pueden ser números reales ($\Re$), polinomios, números complejos (C), etc. En este material sólo se utilizan números reales como elementos de una matriz.

Cada elemento de la matriz tiene dos subíndices, el primer subíndice indica la fila o renglón (*i*) y el segundo la columna (*j*) de la matriz. El elemento a_{ij} indica que está en la *i*-ésima fila y la *j*-ésima columna, para $i = 1,2,...,m$ y $j = 1,2,...n$.

[12]Material tomado con modificaciones de Rendón T. A., Rodríguez F. J. y Morales A. A. *Introducción al Álgebra Lineal y de Matrices con Excel*, UAM-X, México, 1998.

El elemento a_{12} que está situado en la intersección del renglón 1 y la columna 2; a_{22} es el elemento que está situado en el renglón 2 y la columna 2 .
Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

El 5 está situado en el primer renglón y en la primera columna, así su posición es la a_{11}
El 9 está en el primer renglón y en la segunda columna, su posición es la a_{12}
El 2 está en el segundo renglón y en la primera columna, su posición es la a_{21}
El 7 está en el segundo renglón y en la segunda columna, su posición es a_{22}

- Notación de matrices

Se representan mediante una letra latina mayúscula (**A**, **B**, **C**, ... **Z**) en negritas.
También suelen representarse utilizando corchetes $[a_{ij}]$ o $\|a_{ij}\|$
El orden de la matriz $[a_{ij}]$ se representa como: $[a_{ij}]_{mxn}$.

Nota: no confundir al elemento a_{ij} con la matriz $[a_{ij}]$.

Ejemplo:

1) Representación de una tabla de costos de producción por tipo de producto.

Costos de producción por tipo de producto

Costos	**Producto**			
	A	B	C	D
Mano de obra	10	12	16	9
Materiales	5	7	9	4

Los datos de la tabla se pueden representar en una matriz A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

1) Identificación de elementos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 8 & 2 \\ 9 & 5 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

¿Qué valor tiene el elemento?

a_{15} ------- no existe
a_{24} ------- 5
a_{33} ------- 2

¿De qué orden es esta matriz?

R. 4x4

2) ¿Qué diferencia hay entre: a_{ij} y $[a_{ij}]$?

Respuesta: a_{ij} es el elemento genérico de la matriz, ubicado en la fila *i*, columna *j*, $[a_{ij}]$ es la notación abreviada de la matriz.

2.2 Dimensión de una matriz

La dimensión de una matriz u orden, indica primero el número de renglones **m**, enseguida el número de columna **n**, que forman a la matriz m x n, la cual se lee “m por n”.

$$\begin{array}{cc} & \text{columna} \\ \text{renglón} & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}_{m \times n} \end{array}$$

$m = 2$, $n = 3$

La siguiente matriz de calificaciones obtenidas por estudiantes, tiene dimensión 6x4, son seis renglones con cuatro columnas.

Exámenes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 10 & 10 \\ 6 & 7 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 8 \\ 7 & 8 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 7 & 10 \end{bmatrix}_{6 \times 4}$$

Estudiantes

- Matriz rectangular

La matriz rectangular se forma cuando $m \neq n$, o sea, el número de renglones es diferente al número de columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De dimensión m x n

Ejemplo:

1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

En donde $m = 2$ y $n = 3$, entonces $m \neq n$, y A es una matriz rectangular de dimensión 2x3.

- Matriz cuadrada de dimensión n

La matriz cuadrada se forma cuando se tiene el mismo número de renglones y columnas, o sea, que m = n.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

En donde m = 3 y n = 3, entonces m = n y la matriz C cuadrada es de dimensión n = 3.

Ejemplos:

1) R = [7] cuadrada de dimensión 1.

2)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Cuadrada de dimensión 2.

En la matriz cuadrada los elementos que tienen el mismo subíndice en la fila y columna forman la diagonal principal.

Ejemplo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} forman la diagonal principal de la matriz cuadrada de dimensión n = 4.

Ejemplo:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- Escalar (λ)

Es un caso especial de la matriz cuadrada, cuando está formada de una fila y una columna, el elemento que contiene es un número real.

Ejemplo:

$$\lambda = [a_{11}]_{1\times 1}$$

El elemento a_{11} es un número real y la matriz cuadrada de dimensión n = 1 o escalar.

λ= [7] cuadrada de dimensión 1

2.3 Tipos de matrices

La matriz triangular es un caso especial de la matriz cuadrada, se forma cuando todos los elementos por debajo o por encima de la diagonal principal de la matriz son nulos (tienen el número cero).

- Matriz triangular superior

Es una matriz triangular que tiene elementos nulos por debajo de la diagonal principal.

Definición:

Es una matriz triangular superior si cumple con $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \qquad (2.3)$$

Los elementos a_{21}, a_{31}, a_{32} son nulos y están por debajo de la diagonal principal (a_{11}, a_{22}, a_{33}), entonces es una Matriz Triangular Superior de dimensión n = 3.
Ejemplo:

1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

¿Cuáles son los elementos donde $i > j$?
Respuesta: $a_{21}, a_{31}, a_{32},$

- Matriz triangular inferior.

Está formada por elementos nulos en la parte superior de la diagonal principal de la matriz cuadrada.

Definición

La matriz triangular inferior, es en la que todos los elementos sobre la diagonal principal son nulos, $a_{ij}\ \forall\ i < j$

En símbolos, una matriz $A=[\ a_{ij}\ ]_{n \times n}$ es triangular inferior si cumple que:

$$a_{ij} = 0 \ \ \forall \ \ i < j.$$

Por ejemplo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Los elementos a_{12}, a_{13}, a_{23} ,son nulos y están por encima de la diagonal principal (a_{11}, a_{22}, a_{33}), entonces es una matriz triangular inferior de dimensión n = 3.

- Matriz diagonal (D)

Definición:

La matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos. Se simboliza como: D = $[a_{ij}]_{nxn}$, si cumple $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$.

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$$

La matriz A cuadrada está formada por elementos nulos ($a_{21} = a_{12} = 0$) en la parte superior e inferior de la diagonal principal (a_{11} y a_{22}).

Ejemplo:

1)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Los elementos a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{34}, a_{41}, a_{42} y a_{43} son nulos, excepto los de la diagonal principal (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}), entonces es una matriz diagonal de dimensión n = 4.

Nota: Obsérvese que los elementos de la diagonal principal pueden ser diferentes.

La matriz diagonal también la podemos representar como:

D =$[\lambda_i \delta_{ij}]$, si: i = 1, 2, ... n y j = 1, 2, ... n en donde λ_i es un escalar y δ_{ij} es llamado símbolo de Kronecker. Por definición, el símbolo de Kronecker es igual a 1 para $i = j$, e igual a cero para $i \neq j$

- Matriz unitaria o idéntica (I)

Definición:

La matriz unitaria es una matriz triangular superior e inferior (matriz diagonal) en donde los elementos de la diagonal deben de ser igual a uno y se representan con la letra I o I_n (cuando es muy importante indicar el orden).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$\mathbf{I} = \left[\delta_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

Propiedades de la matriz unitaria

a) AI = A
b) IA = A

- Matriz escalar (λ I)

Es una matriz diagonal en la que todos sus elementos diagonales son iguales entre si y se expresa $\lambda\,\mathbf{I} = [\lambda_i\,\delta_{ij}]_{nxn}$ y es una matriz escalar si cumple con:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

λ puede ser un número natural, o entero, racional real o complejo.

Ejemplo:

a) Multiplicar la matriz I por el escalar 2

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} \quad y\lambda = 2 \qquad 2I = [2\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

- Matriz nula o cero (0)

Definición

Una matriz cuadrada cuyos elementos son todos iguales a cero y se representa con la letra mayúscula **O** en negritas.

Ejemplo:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m\ x\ n}$$

La matriz **O** es diferente al número real cero.

- Problemas Propuestos

1. Marca con una x en el espacio correspondiente cuál es el orden de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4.3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

0

–

1 _____

2^3	_____	3 x 1	_____	1	_____
3 x 2	_____	3	_____	1 x 1	_____
6	_____	1 x 3	_____	0	_____
2 x 3	_____	1	_____	1^0	_____

2. Dada la matriz P:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 464 & 721 & \dots & 532 \\ 284 & 445 & \dots & 222 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 482 & 285 & \dots & 1000 \end{bmatrix}$$

Identifique el valor de los siguientes elementos:

P_{m1} = ________ P_{22} = ________ P_{mn} = ________ P_{1n} = ________

3. Dada una matriz T de orden 5 x 2, escriba sus elementos en forma simbólica en el siguiente cuadro:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix};$$

4. ¿Cuál de los siguientes arreglos de números no constituyen una matriz?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \log^2 10 & e \\ 211 & -1 \end{bmatrix}$$

5. El departamento de planeación de la cadena de supermercados "Zamir" ha elaborado la siguiente tabla que resume las ventas (en miles de pesos) registradas durante el curso de una semana en sus principales secciones:
6.

Secciones	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**
A	10.0	11.0	9.8	13.2	11.2	12.0
B	9.9	10.2	12.7	11.6	12.0	11.4
C	14.3	13.8	14.5	14.0	13.9	14.1
D	12.0	12.3	11.9	12.1	12.2	11.6

a) Indique a qué es igual el elemento v_{24} y qué representa.

b) Indique, señalando el elemento v_{ij} respectivo, que día se alcanzó la venta máxima en la sección A; B; C; y D.

c) Indique, señalando el elemento correspondiente, cuál fue la sección de menor movimiento en el día jueves, y cuál fue la del día sábado.

7. Dadas las siguientes matrices:

   a) Indique el orden de cada una de ellas.

   b) ¿A qué casos especiales corresponde cada una de ellas?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) ¿Cómo clasificaría a las siguientes matrices?

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Escriba ejemplos de matrices de orden 3x3 que satisfagan respectivamente a cada uno de los siguientes conjuntos de requisitos.

- Sea triangular superior, diagonal y no escalar.
- Simétrica, escalar y no diagonal.
- Simétrica y no diagonal.

2.4 Operaciones con Matrices

- Adición de matrices

Definición:

Pueden sumarse dos matrices A y B, si sólo si tienen la misma dimensión (mismos números de filas y columnas), al ser sometidas a la operación de suma, da como resultado una tercera matriz C, y ésta tendrá la misma dimensión que la matriz A y B.

Para obtener los elementos de la matriz C, se obtienen sumando los elementos correspondientes de la matriz A y B, es decir:

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ ; para todas las } i \text{ y } j$$

Ejemplo:

1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\text{ x }2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\text{ x }2}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}_{2\text{ x }2}$$

2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 9 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}_{3\text{ x }2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\,x\,2}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4+7 & 2-3 \\ 3+2 & 9+5 \\ 5+1 & 16+0 \end{bmatrix}_{3\text{ x }2} \qquad C = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 5 & 14 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}_{3\,x\,2}$$

3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\text{ x }2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\text{ x }1}$$

A + B ≠ C, por que no cumple con la condición de que la matriz A y la matriz B, deben tener la misma dimensión.

Propiedades de la suma de matrices

a) Conmutativa

A + B = B + A

b) Asociativa

(A + B) + C = A + (B + C)

c) Identidad

A + **0** = **0** + A = A

➢ Producto de un escalar por una matriz

Definición:

Sea una matriz A de dimensión m x n y un escalar λ, se puede definir al producto de la matriz A por un escalar λ, para dar sentido a la operación A + A + ... El producto se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz A por el escalar λ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad \lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Ejemplo:

1)

Matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\lambda\mathbf{A} = -A = \begin{bmatrix} -1a_{11} & -1a_{12} \\ -1a_{21} & -1a_{22} \end{bmatrix}$

Escalar λ = -1

2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Escalar $\lambda = 2$

$$2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(6) & 2(3) \\ 2(7) & 2(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$$

- Sustracción de matrices

Definición

Pueden restarse dos matrices A y B si sólo si, tienen la misma dimensión. Al ser sometidas a la operación de resta, da como resultado una tercera matriz C, y ésta tendrá la misma dimensión que la matriz A y B.

C = A – B

Para obtener los elementos de la matriz C se realizan los siguientes pasos:

1) Multiplicar la matriz B por el escalar
   λ = -1 , λB = (-1B).

2) Sumar la matriz A y la matriz -B
   A + B = [A + (-B)] = A - B

Ejemplo:

1) Demostrar que:

C = A - B = A+ (-B)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$$\mathbf{B}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -8\\ 8 & -3\end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

En la sustracción no hay propiedad conmutativa

$$A - B \neq B - A$$

- Producto interno de matrices

Sea A el vector renglón y B el vector columna, entonces definiremos el producto interno como A • B = $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{in}b_{mj}$. El vector renglón y columna contienen el mismo número de elementos y se calcula multiplicando los elementos correspondientes del vector A y B, y realizando una suma algebraica dando como resultado un valor escalar.

Ejemplo:

1)

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 4\end{bmatrix}= -21+24=3$$

2)

$$\mathbf{C}\bullet\mathbf{D}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 10\\ 20\\ -4\\ -2\end{bmatrix}=30+40+60-8-2=120$$

- Producto de matrices

Definición:

Dada la matriz A de dimensión m x n y una matriz B de dimensión n x p, se define el producto de A por B, como una tercera matriz C con una dimensión m x p, cuyo elemento c_{ij} es producto escalar del i-ésimo renglón por la j-ésima columna de las matrices A y B respectivamente.

Conformación para la multiplicación de matrices

Para poder realizar la multiplicación de dos matrices A y B, se debe cumplir que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de columnas de la matriz B. Dando como resultado que la matriz producto C tenga el mismo número de filas que la matriz A y el mismo número de columnas que la matriz B.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

i = 1, 2, ... , m
j = 1, 2, ... , p

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

El número de columnas de A es igual al de B , o sea , n = 3.

$$m \times \underbrace{n = n}_{} \times p$$

$$2 \times \underbrace{3 = 3}_{} \times 3$$

El producto de la matriz A y B da como resultado la matriz C de dimensión mxp (2 x 3).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Ejemplo:

1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{2X3} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3X3}$$

Para encontrar la matriz C, hay que sumar los productos formados de multiplicar, en orden, cada elemento (es decir, el primero, segundo, etc.) del i-ésimo renglón de A , por el elemento correspondiente (es decir, el primero, el segundo, etc.) de la j-ésima columna de B.

Cálculo del elemento C_{11}, se obtiene al sumar el producto de los elementos del renglón (1) de la matriz A, por los elementos correspondientes de la columna (1) de la matriz B.

C_{11} = (2)(1) + (1)(4) + (6)(5) = 2 + 4 + 30 = 36

El cálculo del elemento C_{21} se obtiene al sumar los elementos del renglón dos de la matriz A por los elementos correspondientes de la columna 1.

C_{21} = (1)(1) + (- 3)(4) + (2)(5) = 1 - 12 + 10 = - 1
C_{12} = (2)(0) + (1)(2) + (6)(1) = 0 + 2 + 6 = 8
C_{22} = (1)(0) + (- 3)(2) + (2)(1) = 0 - 6 +2 = - 4
C_{13} = (2)(3) + (1)(1) + (1)(6) = 6 + 1 + 6 = 13
C_{23} = (1)(3) + (- 3)(1) + (2)(1) = 3 - 3 + 2 = 2

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}_{2\text{ x }3}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 36 & 8 & 13 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{2\text{ x }3}$$

2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\text{ x }2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

- Problemas propuestos:

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{1X\,3}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,1}$

   C = AB = [32 $]_{1x1}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}_{1\,x\,2}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,1}$

No se puede realizar porque el número de columnas de la matriz A es diferente al número de renglones de la matriz B.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{3X\,1}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}_{1\,x\,2}$ $C = AB = \begin{bmatrix} 30 & 36 \\ 25 & 30 \\ 20 & 24 \end{bmatrix}_{3X\,2}$

- Propiedades del producto de matrices

a) AB ≠ BA no se cumple la ley conmutativa.

b) Asociativa.
   A (BC) = (AB) C

c) Distributiva.
   AB + AC = A(B + C)
   (A + B) C = AC + BC

2.5 Matriz inversa

Dada una matriz A y llamamos a su inversa A^{-1} (si ésta existe), entonces la relación entre la matriz A y su inversa A^{-1}, es el producto de A y A^{-1} el cual da origen a una matriz identidad (**I**) en donde:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}$$

Si la matriz inversa A^{-1} existe, a la matriz A se le llama Matriz no singular; cuando la matriz inversa A^{-1} no existe, a la matriz A se le llama matriz singular.
Para obtener la matriz inversa es necesario considerar los siguientes puntos:

1) La matriz A debe de ser cuadrada, para poder obtener su inversa A^{-1} (también es cuadrada) y ambas tienen la misma dimensión mxn.

2) Una matriz A cuadrada tiene una matriz inversa A^{-1}, siempre y cuando todos los renglones o columnas, sean linealmente independientes, es decir, que ningún renglón o columna es una combinación lineal de los renglones o columnas restantes, entonces la matriz A se denomina no singular.

3) No toda matriz A cuadrada, tiene una inversa. Si una matriz A cuadrada no tiene inversa A^{-1}, esto quiere decir que los renglones y columnas son linealmente dependientes, entonces la matriz A se denomina singular.

Ejemplo:

La inversa de una matriz se parece al recíproco de un número **a** en álgebra de números reales. Dado un número **a**, su inverso o recíproco es un número a^{-1}, tal que $aa^{-1} = 1$. En álgebra de números es fácil de comprender que $a^{-1} = 1/a$. En álgebra matricial es más laborioso encontrar la inversa de una matriz y se sabe que el producto de una matriz A por su inversa A^{-1} (existe) da por resultado una matriz identidad **I,** ($AA^{-1} = \mathbf{I}$).

Demostrar que la matriz B, es la inversa de la matriz A para obtener los productos AB y BA.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Si : $A^{-1} = B$

Entonces:

a)

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como en ambos resultados tenemos una matriz **I** de dimensión de 2x2, entonces podemos afirmar que la matriz B es la inversa de la matriz A.

- Propiedades de la matriz inversa

a) La inversa de la matriz inversa da como resultado la matriz original.

$(A^{-1})^{-1} = A$

b) Utilizando la definición de matriz inversa

$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}A^{-1} = \mathbf{I}$

$A^{-1}(A) = A(A^{-1}) = \mathbf{I}$

c) La inversa de la matriz identidad es ella misma

$\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$

d) Inversa de la matriz diagonal

Si partimos de la definición de la matriz diagonal $D = [\delta_{ij}\lambda_i]$ la cual tiene todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero, entonces la inversa de la matriz **D** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son los inversos de los elementos de la diagonal principal de la matriz original.

$$\mathbf{D} = \left[\delta_{ij} \frac{1}{\lambda_i} \right]$$

e) La inversa de la matriz transpuesta $(A^t)^{-1}$ es igual a la transpuesta de la inversa $(A^{-1})^t$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

f) La inversa del producto de dos matrices no singulares A y B es igual al producto de las dos matrices inversas en distinto orden.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

g) Si el producto de dos matrices A y B es igual a la matriz nula, y la matriz A es no singular, podemos determinar que la matriz B es igual a la matriz nula. De la misma manera cuando BA = **0** y la matriz A es no singular se puede determinar que B = **0**. Si A es una matriz no singular y que AB = **0**, al multiplicar el producto de matrices A y B por la inversa de A será igual a la matriz nula.

$$A^{-1}AB = A^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

si: $A^{-1}A = \mathbf{I}$

Entonces:

$$\mathbf{I}B = \mathbf{0}$$

$$B = \mathbf{0}$$

- Determinación de la matriz inversa

Existen diversos métodos para calcular la matriz inversa. Partiendo de la misma definición ($AA^{-1} = \mathbf{I}$).

Sea la matriz A, llamamos a la matriz B la inversa de A.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.6 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

si: AB = **I** ∴

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -0.6 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{12} \\ \mathrm{b}_{21} & \mathrm{b}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} b_{11} - 0.6b_{21} & 1b_{12} - 0.6b_{22} \\ -0.3b_{11} + 1b_{21} & -0.3b_{12} + 1b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la regla de multiplicación de matrices se puede plantear un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{array}{lr} b_{11} - 0.6b_{21} = 1 & (1) \\ b_{12} - 0.6b_{22} = 0 & (2) \\ -0.3\, b_{11} + 1\, b_{21} = 0 & (3) \\ -0.3\, b_{12} + 1\, b_{22} = 1 & (4) \end{array}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 1.22 \\ b_{12} &= 0.73 \\ b_{21} &= 0.36 \\ b_{22} &= 1.22 \end{aligned}$$

La matriz inversa queda como:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.22 & 0.73 \\ 0.36 & 1.22 \end{bmatrix}$$

- Problemas propuestos

1. Encontrar la matriz inversa
   Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + y + z &= 4 \\ 2x + 2y - z &= -4 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrar la inversa de B

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ 0 & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \end{bmatrix}$$

2. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas:

	V	F
❖ Si el producto A x B = 0 entonces: A = 0 B = 0	______	______
❖ Hay matrices cuadradas para las que no existe su transpuesta	______	______
❖ A x B = B x A si y sólo si A y B son matrices cuadradas	______	______

3. Indique si la siguiente proposición es verdadera o falsa y explique brevemente su respuesta (A - B) + C = A - (B + C) para todas las matrices A, B y C conformables para la operación de suma.

4. Dada la matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Obtenga la matriz P^{-1}
b) Efectúe el producto PP^{-1}
c) ¿Qué tipo de matriz ha obtenido?

5. Si $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Demuestre que: $Q\,Q^{-1} = Q^{-1}\,Q$

2.6 Método de matriz aumentada (Gauss–Jordan)

Una matriz aumentada es un arreglo que permite resolver un sistema de ecuaciones lineales en forma sencilla. En lugar de escribir todo el sistema en cada paso de la eliminación gaussiana, sólo se escribe el arreglo de números que muestran los coeficientes de las variables del sistema y todos los términos independientes.
La matriz aumentada de un sistema de m-ecuaciones con n-incógnitas se representa de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Por ejemplo:

La matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 9x_4 &= 8 \quad (1) \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 0 \quad (2) \\ 2x_x - x_3 + 8x_4 &= 5 \quad (3) \\ x_4 &= 4 \quad (4) \end{aligned}$$

Es:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 5 & 1 & -9 & 8 \\ 1 & -7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Para resolver un sistema de ecuaciones empleando la matriz aumentada, se realizan operaciones elementales de renglón, estas operaciones son:

Intercambio de renglones de la matriz aumentada.

Multiplicación de cualquier renglón de la matriz aumentada por un número real diferente de cero.

Sustitución de cualquier renglón de la matriz por el resultado de sumarle el múltiplo de cualquier otro renglón.

A la acción de aplicar estos tres pasos en la matriz aumentada se le conoce como reducción de renglones, y esto permite obtener una matriz escalonada reducida por renglones.

Definición

Una matriz es de la forma escalonada reducida por renglones si se cumplen las condiciones siguientes:

1. El primer elemento de un renglón (componente guía) que no contiene un elemento cero es igual a uno.
2. Todos los elementos que están por debajo del componente guía de un renglón son iguales a cero.
3. El componente guía de cada renglón se encuentra a la derecha del componente guía de cada renglón precedente.
4. Todos los renglones que constan solamente del elemento cero se encuentran en la parte inferior de la matriz.
5. Todas las columnas que incluyen un componente guía de algún renglón tienen ceros en el resto de las posiciones.

Ejemplos:

1)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Utilizando la notación de matriz aumentada resuelva el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x+y+2z&=9 \quad (1)\\ 2x+4y-3z&=1 \quad (2)\\ 3x+6y-5z&=0 \quad (3) \end{aligned}$$

La matriz aumentada que representa el sistema es:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9\\ 2 & 4 & -3 & 1\\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Multiplicando el primer renglón por -2 y sumándolo al renglón 2, la matriz se reduce a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Multiplicando el primer renglón por -3 y sumándolo al renglón 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Multiplicando por un 1/2 el renglón dos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2}\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Multiplicando por -3 el renglón dos y sumándolo al renglón tres

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Multiplicando por -2 el renglón 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Utilizando el método de matriz aumentada (Gauss-Jordan) para generar más reducciones en los renglones, se multiplica por –1 el renglón dos y se suma al renglón uno, el resultado es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Multiplicando por -11/2 el renglón tres y sumándolo al renglón uno

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Multiplicando por 7/ 2 el renglón tres y sumándolo al renglón dos.

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

La matriz A se redujo a la forma escalonada reducida. Si planteamos el sistema de ecuaciones lineales asociado de A es:

x = 1
y = 2
z = 3

Y el sistema tiene solución única.

- **Inversa de la matriz por reducción Gaussiana**

Para determinar la matriz inversa de A (m x n) empleando el método de reducción Gaussiana, se realizan los siguientes pasos:

1. Sumar a la matriz A (m x n) una matriz identidad **I** (m x n)

$$\left[A/I\right]$$

2. Realizar las operaciones de renglón en toda la matriz aumentada, de tal forma que la matriz A (de coeficientes del sistema) se transforma en una matriz identidad **I**, y la matriz identidad original se convierte en la matriz inversa de A.

$$\left[A/I^{-1}\right]$$

Ejemplo:

1) Encontrar la matriz inversa.
   Sea el sistema de ecuaciones:

$$3x + 5y = 7$$
$$2x - \ y = -4$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrar A^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{13}R_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{3}R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

- Problema propuesto

1) Resolver el sistema de ecuaciones lineales por método de Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \qquad (1)\\
&2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 7 \qquad (2)\\
&3x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

La matriz aumentada que representa el sistema s:

$$
A = \left[\begin{array}{cccc:cc} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right]
$$

Desarrollando el método tendremos:

$$
\xrightarrow{2R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{22}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{7} & \frac{4}{7} & \frac{15}{7} \end{array}\right] = A´
$$

Sistema de ecuaciones asociado a la matriz A'.

$X_1 \;-\; 6/7X_4 \;+\; 22/7X_5 \;= 16/7$

$X_2 \;+\; 1/7X_4 \;+\; 13/7X_5 \;=\; 2/7$

$X_3 \;+\; 11/7X_4 \;+\; 4/7X_5 \;=\; 15/7$

Haciendo a X_4 = a y X_5 = b, se obtiene un conjunto solución:

$X_1 \;-\; 6/7a \;+\; 22/7b \;=\; 16/7$

$X_2 \;+\; 1/7a \;+\; 13/7b \;=\; 2/7$

$X_3 \;+\; 11/7a \;+\; 4/7b \;=\; 15/7$

Ahora si a = 2 y b = 1, se obtiene una solución particular:

X1 = 6/7
X2 = -13/7
X3 = -11/7
X4 = 2
X5 = 1

Para resolver un sistema de **m** ecuaciones con **n** incógnitas se debe continuar con el método de Gauss–Jordan hasta donde la matriz tome la forma escalonada reducida.

Tema 3

CÁLCULO DIFERENCIAL

2. Matrices

OBJETIVOS

- Comprender los conceptos básicos
- Distinguir y emplear la simbología
- Calcular las operaciones básicas de conjuntos
- Identificar y aplicar las propiedades algebraicas de los conjuntos
- Desarrollar el producto cartesiano y presentarlo gráficamente

CONTENIDO

3.1 Funciones

3.2 Límites

3.3 Funciones continuas y discontinuas

3.4 Derivadas de funciones algebraicas

3.5 Derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas

3.6 Regla de la cadena

3.7 Derivada de las funciones de orden superior

3.8 Funciones crecientes y decrecientes

3.9 Valores máximos y mínimos de una función

3.10 Problemas de aplicación

3.1 Funciones

- Definición de función

Una función es una regla (f) que asigna a cada valor de una variable (x), uno y sólo un valor [f(x)], llamado valor de la función en x.
A la variable (x) se le llama variable independiente y a la variable (y) o [f(x)] se le llama variable dependiente.

El dominio de una función hace referencia al conjunto de los posibles valores (números reales) que puede tomar la variable independiente; el rango o contradominio hace referencia al conjunto de los posibles valores (números reales) que resultan para la variable dependiente.

Algunas funciones que se utilizan en el cálculo son; las funciones lineales, cuadráticas, polinomial, racional, potencia y logarítmica, el dominio de las funciones anteriores son los reales, y excluye cualquier valor de x que implique una operación indefinida.

Para representar el dominio y el contradominio (o rango) de una función, se utilizan intervalos numéricos en los que el paréntesis redondo nos indica que no se incluye al valor (intervalo abierto) y el cuadrado indica que sí se incluye (intervalo cerrado).

Ejemplo:

Sea la función: $y = \sqrt{x^2 - 9}$

Como los valores están restringidos a los números reales, entonces y es una función de x, sólo cuando $x \geq 3$ ó $x \leq -3$, porque para cualquier valor de x que satisfaga cualquiera de estas desigualdades le corresponde un único valor de y; sin embargo, si x está en el intervalo $-3 < x < 3$, se obtiene la raíz cuadrada con un número negativo, por lo tanto no existe un número real para y, entonces la función tiene un dominio $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ y Contradominio $[0, \infty)$.

En el dominio se observa que los símbolos que representan al infinito y a menos infinito sólo nos indican que puede ser un número muy grande y uno muy pequeño respectivamente. En el caso del 3 y el –3, los paréntesis cuadrados nos indican que este valor se incluye en el dominio. Con respecto al contradominio se observa que el cero está incluido y el infinito no.

Ejemplos:

1. Encontrar el dominio y el contradominio de g y trazar su gráfica.
   Sea la función:

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Solución:

Se puede obtener un determinado valor para y, cuando x toma todos los valores de los números reales excepto el 3, porque el numerador y el denominador se hacen cero (y = 0/0) obteniendo como resultado que la operación no se puede realizar, ya que ésta no está determinada.

Si se factoriza el numerador, se tiene:

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x - 3}$$

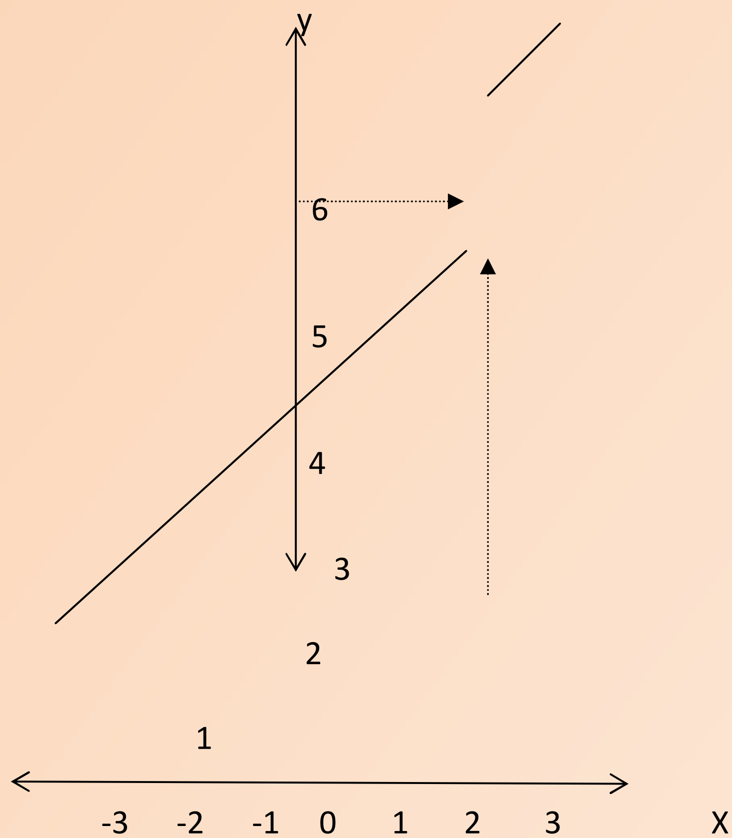
g(x)= x + 3, cuando x = 3 se obtiene como resultado g(x) = 6.

Entonces el Dominio (-∞, ∞) excepto 3 y el contradominio (-∞, ∞) excepto 6.

Tabla 3.1.2

x	y
-3	0
-2	1
-1	2
0	3
1	2
2	5
3	(6) ----no pertenece a la gráfica

Gráfica 3.1.1



3.2 Límites

- Límite de una función

Definición

Sea f(x) una función que está definida en todos los valores cercanos a, con la excepción de sí mismo. Se dice que L es el límite de f(x) cuando x tiende a **a**, si la diferencia entre f(x) y L puede hacerse tan pequeña como se desea, con sólo restringir x a estar lo suficientemente cerca de a. Quedando entonces representado como:

$$\underset{x \to a}{\text{Lím}}\ f(x) = L$$

Ejemplos:

1. Considerando la función f definida por la ecuación

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$$

f está definida para todos los valores de x excepto cuando x = 1. Además, si: x $\rightarrow$ 1, el numerador y el denominador pueden ser divididos entre (x − 1) para obtener:

$$f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad x \rightarrow 1$$

Como se muestra a continuación: x toma los valores, 0, 0.25, 0.50, 0.75. 0.9, 0.99, 0.999 y así sucesivamente. Entonces x toma valores cada vez más cercanos a uno pero x nunca toma el valor de uno, en otras palabras, la variable x se aproxima por la izquierda a 1 a través de valores que son números menores muy cercanos a éste. Ahora si analizamos a la variable x cuando se aproxima por el lado derecho a 1, a través de valores mayores que éste, esto hace por ejemplo que x tome valores de 2, 1.75, 1.50, 1.25, 1.10, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, y así sucesivamente, pero nunca toma el valor de uno.

Acercándonos a 1 por la izquierda:

Tabla 3.2.1

X	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999
f(x) = 2x + 3	3	3.5	4	4.5	4.8	4.98	4.998	4.9998

Pero $x \neq 1$

Acercándonos a 1 por la derecha:

Tabla 3.2.2

X	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001
f (x) = 2x + 3	7	6.5	6	5.5	5.2	5.02	5.002	5.0002

Pero x $\neq$ 1

Se observa en ambas tablas a medida que x se aproxima cada vez más a 1, f(x) también se aproxima cada vez a 5 y entre más cerca esté x de 1, más cerca f (x) a 5, en consecuencia, cuando x se aproxima a 1 por abajo o por arriba, f(x)=2x+3 se acerca a 5.
Se indica que el límite de f(x) cuando x tiende a 1 es igual a 5, esto se representa así:

$$\lim_{x \to 1} (2x+3)=5$$

Encontrar el límite de:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} = 5$$

1. Conclusión f(x) no está definida en x = 1, sin embargo lím f(x) existe cuando x $\rightarrow$

2. Encontrar el límite de la función

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

Sustituyendo el valor de tres donde se encuentra la x se tiene:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$ operación no determinada

conclusión f(x) no está definida en x = 3, sin embargo, $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe, por que la podemos escribir como:

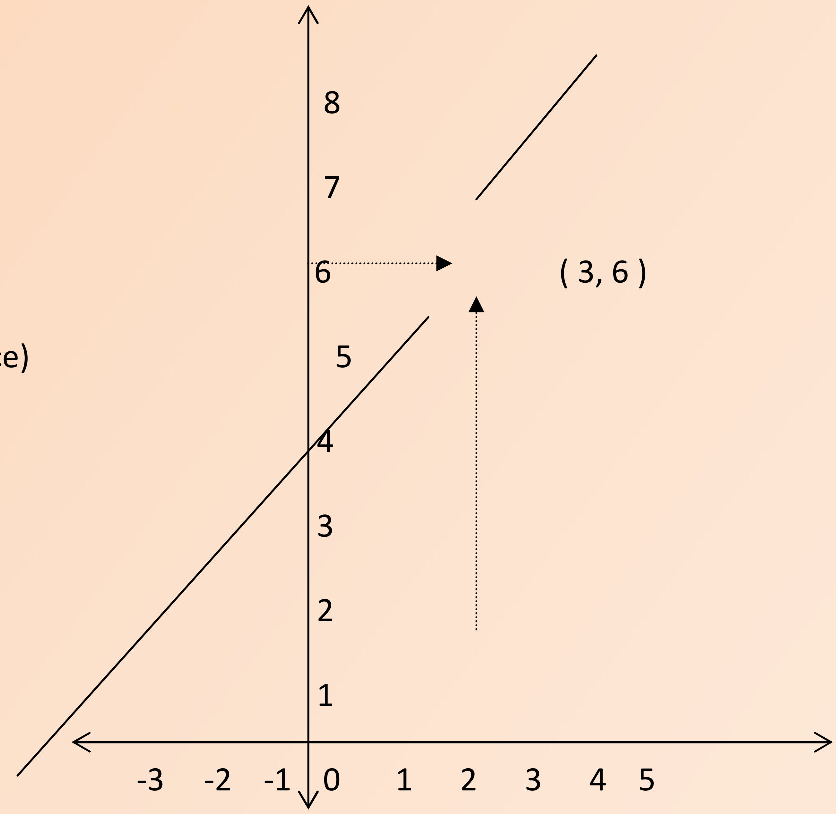
$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} x+3 = 3+3 = 6$$

Por lo tanto, el límite de la función existe y es igual a 6; el punto crítico es: (3, 6) no pertenece a la gráfica.

Tabla 3.2.3

x	y	
-3	0	
-2	1	
-1	2	
0	3	
1	4	
2	5	
3	6	(no pertenece)

Gráfica 3.2.1



Función discontinua en (3, 6)

- Definición de continuidad

Una función f(x) es continua en x = a si: la función f(a) como el $\lim_{x \to a} f(x)$ *existen y son iguales. Analizamos funciones continua y discontinua con mayor detalle en la sección 3.3.*

- Propiedades de los límites

Las propiedades básicas de las operaciones con límites de una función son:

Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, si los dos límites existen

Entonces:

1. $$\lim_{x \to a} k\left[f(x)\right] = k \lim_{x \to a} f(x) = kL$$
2. $$\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$$
3. $$\lim_{x \to a} f(x) \bullet g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \bullet \lim_{x \to a} g(x) = L \bullet M$$
4. $$\lim_{x \to a} f(x) \div g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \div \lim_{x \to a} g(x) = L \div M, M \neq 0$$
5. $$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$
6. Si k es una constante $\lim_{x \to a} k = k$
7. Si m, b, y c son tres constantes, entonces

$$\lim_{x \to c} (m x + b) = mc + b$$

De acuerdo al análisis de las propiedades de límites se podrá observar que el valor límite de una función se puede obtener con la simple sustitución del valor de límite de x en la función dada. Este método de sustitución siempre nos lleva a una respuesta correcta si la función es continua en el límite que se está evaluando.

Todos los polinomios son funciones continuas y cualquier función racional es continua, excepto en los puntos en que el denominador se hace cero, dando como resultado del cálculo de un límite que la operación no esté determinada y se concluye que el límite no existe (0/0 ó una constante divida entre cero d/0).

Ejemplos:

1. Calcular el límite de la siguiente función, cuando $x \to -1$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2}$$

haciendo x = -1 en la fórmula válida para f (x), tenemos

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{1 - (-1)^2} = \frac{0}{0}$$ la operación no está determinada

Factorizando

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{x+2}{1-x} = \frac{-1+2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

Entonces: $$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{2}$$

2. Determine $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Racionalizando se tiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

3. Determine $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{5x^3 - 15}$

$$\lim_{x \to 2} \left(5x^3 - 15\right)^{1/2} = \left[\lim_{x \to 2} \left(5x^3 - 15\right)\right]^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} = 5$$

4. Determine $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x-1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejercicios propuestos

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$ $\qquad R. = -\dfrac{2}{3}$

2. $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 1}$ $\qquad R = -\dfrac{1}{2}$

3. $$\lim_{t \to -1} \frac{t^2 - 1}{t - 1} \qquad R. = Cero$$

4. $$\underset{x \to \infty}{Lím} \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x} \qquad R = -\frac{2}{3}$$

5. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x(3x - 6)}{x(4 - \frac{8}{x})} \qquad R = \infty$$

6. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \qquad R := \frac{3}{2}$$

7. $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \qquad R. = Cero$$

3.3 Funciones continuas y discontinuas

Se define función continua como aquella, cuya gráfica es una curva que es continua, la cual no tiene huecos (vacíos) o que esté segmentada.

Se dice que una función es continua para un valor en x = a, si cumple con:

a. f(a) está definida

b. $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*

c. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Para que un límite exista, la función debe aproximarse al mismo punto x = a por ambos lados.

Ejemplos:

1. La función $f(x) = x^2$ ¿es continua en x = 3?

a. $f(x) = x^2$ está definida

b. $\lim_{x \to 3} x^2 = (3)(3) = 9$

c. Valor funcional

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = f(3)$$

$$9 = 9$$

Es continua para x = 3

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ¿es continua en x = 3?

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ está definida

b.

$$\lim_{x \to 3} \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$$

c. $f(x) = \dfrac{3+1}{3-2} = \dfrac{4}{1} = 4$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(a)$$

4 = 4

Es continua en x = 3

Función Discontinua

Cuando no se cumplen las condiciones de continuidad de una función, a ésta se le llama Discontinua.

Ejemplos:

1. $f(x) = \frac{5}{x-1}$ ¿Es discontinua para x = 1?

a. $f(x) = \frac{5}{x-1}$ Es discontinua para x = 1

b. $\lim_{x \to 1} = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0} =$ No existe el límite

c. $f(x) = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0} =$ La operación no está definida

La función es discontinua en x = 1.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿Es continua en x = 0?

a. $f(x) = \frac{1}{x}$ Es discontinua en x = 0

b. $\lim_{x \to 0} = \frac{1}{x}$ No existe el límite

c. $f(0)=\frac{1}{0}$ No está definida la operación

La función es discontinua en x = 0, pero la función es continua en x $\neq$ 0.

Una función f(x) es continua en un intervalo abierto a < x < b, si es continua en cada x del intervalo. En un intervalo cerrado a $\leq$ x $\leq$ b, si f(x) es continua en el intervalo abierto a < x < b y f(x) se aproxima a f(a) a medida que x se acerca al valor de a por la derecha (para a < x) y f(x) se aproxima a f(b) a medida que x tiende al valor b por la izquierda (para x < b).

- Interpretación geométrica de la derivada

El cálculo diferencial estudia el cambio que le ocurre a una variable cuando existen variaciones en otra variable de la cual depende la variable original.
Los investigadores del área económica-administrativa se interesan por las razones de cambio promedio e instantáneo y están particularmente interesados en las tasas marginales de cambio, tales como: el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

Para llegar a un concepto claro de derivada, esta sección define lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

- Definición de un incremento de una variable

Sea y = f(x) una función, con x_1 y x_2, un par de valores en el dominio de f, de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces:

1. El cambio en el valor de x al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de x y se representa por Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$.

2. El cambio en el valor de Y al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de y, se representa por ΔY, donde:

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = f(X_2) - f(X_1)$$

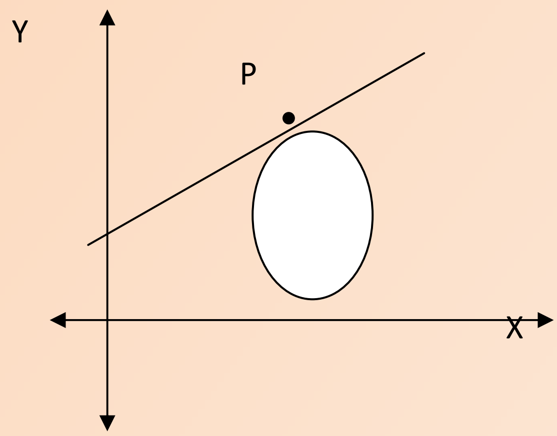
- Tasa de cambio

Para entender el comportamiento geométrico de la derivada, se define la tasa de cambio de una función f(x), entre x y x+Δx, al cociente $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$

Muchos de los problemas importantes del cálculo dependen de encontrar la recta tangente a una curva dada en un punto específico de la curva. Si la curva es una circunferencia, sabemos de la geometría plana que la recta tangente en un punto P de la circunferencia se define como la recta que intersecta a la circunferencia únicamente en el punto P. Esta definición no es suficiente para cualquier curva en general.

Por ejemplo, en la gráfica. 3.3.1 en donde la línea es la recta tangente a la curva en el punto P, la cual intersecta a la curva en el punto P.

Gráfica 3.3.1

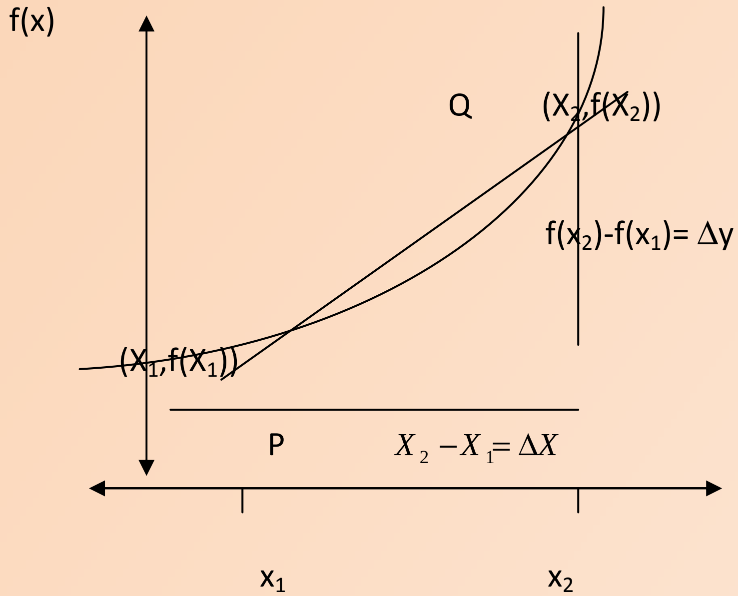


Para llegar a una definición adecuada de la recta tangente a la gráfica de la función, se comienza por considerar cómo se definiría la pendiente de la recta tangente en un punto, si conocemos la pendiente de una recta y un punto sobre la misma, la recta está determinada. (punto-pendiente).

Sea la función f, continua en x_1. Se define la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en P (x_1, f(x_1)).

Sea Q (x_2, f(x_2)) otro punto sobre la gráfica de la función f.

Figura 3.3.2



Cualquier recta que pase por dos puntos de una curva se llama secante; por lo tanto, la recta a través de P y Q es una recta secante. En la figura 3.3.2 está a la derecha de P; sin embargo, Q puede estar ya sea a la derecha o a la izquierda de P.

Denotemos la diferencia de las abscisas de Q y P por Δx tal que:

$$\boldsymbol{\Delta x = x_2 - x_1}$$

Δ_x puede ser positivo o negativo. La pendiente de la recta secante PQ está definida por:

$$M_{pq} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ya que $X_2 = X_1 + \Delta x$, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$M_{pq} = \frac{f(x_1 + \Delta_x) - f(x_1)}{\Delta_x}$$

Ahora el punto P está fijo, si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia P; entonces Q se aproxima a P. Esto es equivalente a establecer que Δx tiende a cero. Como esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P. Si esta recta secante tiene un punto límite, a esta posición límite, común de la recta secante se le define como la recta tangente a la curva en P. Así se querría que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en P sea el límite de M_{pq} cuando Δx se aproxima a cero, y el límite existe.

Esto conduce a la siguiente definición:

- **Pendiente de una recta tangente**

La pendiente de la recta tangente en la gráfica de la función f en el punto P (x, f(x)) esta dada por:

$$m(x) = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ si el límite existe.

El límite que mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica de Y = f(x) en el punto P (x, f(x)) recibe el nombre especial de derivada de f en x.

- **Derivada de una función**

La derivada de una función f con respecto de x es la función f’ (que se lee ”f prima de x”), definida por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde el dominio de f’ es el conjunto de todas las x donde existe límite.

- Diferenciación

La operación de calcular la derivada de una función se denomina diferenciación.
Si la derivada de una función existe en un punto a, se dice que f es diferenciable en este punto.

Ejemplo:

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 4x + 3$ en el punto (x_1,y_1).

Si: $f(x) = x^2 - 4x + 3$, entonces:

$f(x_1) = x_1^2 - 4x_1 + 3$ y $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - 4(x_1 + \Delta x) + 3$

de la definición (i) tenemos:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x_1 + \Delta x)^2 - 4(x_1 + \Delta x) + 3) - (x_1^2 - 4x_1 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 4x_1 - 4\Delta x + 3 - x_1^2 + 4x_1 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2{}_1 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

Ya que $\Delta x \to 0$ podemos factorizar Δx en el numerador

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x_1 - 4)}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x - 4$$

En donde:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_1 + \Delta x - 4$$

Por sustitución:

$$m(x_1) = 2x_1 - 4$$

Nota: Cuando se obtiene como resultado del cálculo de un límite **0/0** o **constante/0**, se concluye que el límite no existe.

- Problemas propuestos

1. Calcular el límite de la siguiente función $f(x) = (x^2 + 3x + 2) / (1-x)$, cuando $x \to -1$.
2. Calcular la derivada aplicando límites $f(x) = 3x$. R. 3
3. Calcular la derivada aplicando límites $f(x) = 1 / x$. R. −1/x2
4. Calcular la derivada aplicando límites $f(x) = 4x+1$. R. 4
5. Calcular la derivada aplicando límites $f(x) = x^4 - 12x - 13$. R. $4x^3 - 12$

3.4 Derivadas de las funciones algebraicas

Al utilizar la definición dada anteriormente para calcular la derivada de algunas funciones no siempre es sencillo, lleva tiempo y cuidado; por ello, es necesario conocer reglas que faciliten este procedimiento. Estas reglas forman lo que se denomina el álgebra de derivadas. La notación $\frac{dy}{dx}$ representa un sólo símbolo y no deberá interpretarse como el cociente de las cantidades de *dy* y *dx*, $\frac{dy}{dx}$ indica la derivada dy con respecto a x si y es una función de la variable independiente x, la derivada también se denota por las siguientes representaciones:

$$\frac{d}{dx}(y), \quad \frac{df}{dx}, \quad y', \quad Dxy, \quad Dxf, \quad \frac{d}{dx}(f).$$

Las principales derivadas algebraicas:

1. Derivada de una constante es igual acero, si: y = c

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(6) = 0$

b. $\frac{d}{dx}(b) = 0$

Problemas:

1. $\frac{d}{dx}(18)$ R. 0

2. $\frac{d}{dx}(3b)$ R. 0

2. Derivada de una variable es igual a uno, si: y = x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dt}(t) = 1$

b $\frac{d}{dr}(r) = 1$

Problemas:

1. $\frac{d}{dy}(y)$ R. 1
2. $\frac{d}{dm}(m)$ R. 1

3. La derivada de la potencia n-ésima de una variable es el producto del exponente n y la potencia del exponente n-1 de la variable, si: $y=x^n$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$

b. $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{8}}) = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$

Problemas:

1. $\frac{d}{dx}(x^{-3}) \qquad R. \quad -\frac{3}{x^4}$

2. $\frac{d}{dx}(x^{-\frac{5}{3}}) \qquad R. \quad -\frac{5}{3x^{\frac{8}{3}}}$

4. Derivada del producto de una constante y una función. Si: y =cu en donde u= f(x).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(10x) = 10\frac{d}{dx}(x) = 10$

b. $\frac{d}{dx}(-2x^{\frac{4}{3}}) = -2\frac{d}{dx}(x^{\frac{4}{3}}) = -2\left[\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{4}{3}-1}\right] = -\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}$

Problemas:

1. $\frac{d}{dx}(4x^3) \qquad R. \quad 12x^2$

2. $\frac{d}{dx}(16x^{\frac{1}{2}}) \qquad R. \quad \frac{8}{x^{1/2}}$

5. Derivada de la suma de un número infinito de funciones. Si: Y = u + v en donde u = f(x) y v = g(x).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(3x^2+4x+2)=3\frac{d}{dx}(x^2)+4\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(2)=3(2x)+4+0=6x+4$

b. $\frac{d}{dx}(2x-6x^{-\frac{1}{2}}+10)=2\frac{d}{dx}(x)-6\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})+\frac{d}{dx}(10)=\frac{-3}{\sqrt{x}}+2$

Problemas:

1. $\frac{d}{dx}(7x^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{4}}+7x-5)$ $\qquad R.\frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}+7$

2. $\frac{d}{dx}(16x^{\frac{1}{2}}+7x+4)$ $\qquad R.\ \ 8x^{-1/2}+7$

6. Derivada del producto de dos funciones.

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo:

a. f(x) = $(x^3+3)(x+2)$

Sea: u=(x^3+3) y v=(x+2)

$$\frac{d}{dx}(uv)=(x^3+3)\frac{d}{dx}(x+2)+(x+2)\frac{d}{dx}(x^3+3)=4x^3+6x^2+3$$

b. $f(x)=\left(\sqrt{x}+3\right)\left(x+3\right)$

Sea: $u=\sqrt{x}+3$ y v = x+3

f´(x) = $\left(\sqrt{x}+3\right)\left(1\right)+\left(x+3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)=\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\frac{x+3}{2\sqrt{x}}\right)$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = (x^3 + 2)(x)$ R. $4x^3+2$

2. $f(x) = \left(x^{1/2} + x\right)(2x)$ R. $4x + 3\sqrt{x}$

7. Derivada del cociente de una constante y una función.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = -\frac{c}{u^2}\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo:

a. $f(x) = \dfrac{4}{x^6}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^6}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{x^{12}}\right)\left(6x^5\right) = -\frac{24x^5}{x^{12}} = -24x^{-7}$$

b. $f(x) = \dfrac{36}{x^3 + 1}$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{36}{x^3 + 1}\right) = -\frac{108x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = \dfrac{6}{(x^3 + 1)^2}$ $R.\dfrac{-36x^2}{(x^3 + 1)^3}$

2. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2}$ $R. -\dfrac{6x}{(x^2 + 2)^2}$

8. Derivada del cociente de una función y una constante.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{\frac{du}{dx}}{c}$$

a. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3}$

Donde: $c=3$ y u = x^2+1

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2+1}{3}=\frac{2x}{3}$$

b. $f(x)=\dfrac{\left(x^2+2\right)^2}{16}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(x^2+2)^2}{16}\right)=\dfrac{x^3+x}{4}$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=\dfrac{3x^3(x^2+2)}{3}$ R. $5x^4 + 6x^2$

2. $f(x)=\dfrac{(x^2+2)^3}{3}$ R. $\dfrac{2x^2+2x}{3}$

9. Derivada del cociente de dos funciones.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\left(\frac{du}{dx}\right)-u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

a. $f(x)=\dfrac{x^3+16}{x^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+16}{x^2}\right)=\frac{x^2\left(\frac{d}{dx}(x^3+16)\right)-(x^3+16)\left(\frac{d}{dx}(x^2)\right)}{(x^2)^2}=\frac{x^3-32}{x^3}=1-\frac{32}{x^3}$$

b. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-6}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-4x+1}{x-6}\right)=\dfrac{x^2-12x+23}{(x-6)^2}$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+4}$ R. $\dfrac{-x^2+6x+4}{\left(x^2+4\right)^2}$

2. $f(x)=\dfrac{18x^7+12x^2+3}{x^3+1}$ R. $\dfrac{72x^9+126x^6-12x^4-9x^2+24x}{\left(x^3+1\right)^2}$

10. Derivada de la potencia n-ésima de una función derivable.

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

a. $f(x)=\left(x^2+3\right)^3$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3\right)^3=3(x^2+3)^2(2x)=6x(x^2+3)^2$$

b. $f(x)=\left(x+3\right)^{-\frac{1}{3}}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\left(x+3\right)^{-1/3}=\dfrac{-1}{3(x+3)^{4/3}}$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = (x^2 - x)^{-2}$ R. $\dfrac{2-4x}{(x^2-x)^3}$

2. $f(x) = x^2(x+1)^{-1}$ R. $\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

11. Derivada de la raíz n-ésima potencia de una función.

$$\frac{d(\sqrt[n]{u})}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

n es el índice del radical.

a. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{2x^2 + x}\right) = \frac{4x+1}{3\sqrt[3]{(2x^2+x)^2}}$$

b. $f(x) = \sqrt{x+1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ R. $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

2. $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 6}$ R. $\dfrac{3x^2}{4\sqrt[4]{(x^3+6)^3}}$

12. Derivada de una función inversa.

La derivada de una función inversa es igual al recíproco de la derivada de la función. Si y = f(x) y x = g(y) son funciones diferenciables inversas.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}$$

a. $x=y^2+6$ obtener $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\left(y^2+6\right)=2y \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$$

b. $x=y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5$ o bien $\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\left(y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right)=\left(1+y^2+y^4\right) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+y^2+y^4}$$

Problemas propuestos:

1. $x=y^2+6\text{y}$ R. $\frac{1}{2y+6}$

2. $x=y+y^2$ R. $\frac{1}{1+2y}$

3.5 Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

1. Derivada de una constante elevada a una función.

Si: $f(x)=a^u$ en donde u = f(x) es una función derivable con respecto a x.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(a^u\right)=a^u Lna\frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

a. $f(x)=2^{-x}$

$$\frac{d}{dx}\left(2^{-x}\right)=2^{-x}Ln(2)\frac{d}{dx}(-x)=-2^{-x}Ln(2)$$

b. $f(x)=10^{x^2-x}$

$$\frac{d}{dx}10^{x^2-x}=10^{x^2-x}\ln 10(2x-1)$$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=a^x x^a$ R. $a^x x^a\left(\frac{a}{x}+\ln(a)\right)$

2. $f(x)=18^{x^2+2}$ R. $18^{x^2+2}\ln 18(2x)$

2. Derivada de **e** elevada a una función u.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^u\right)=e^u\frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

a. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right)=\frac{x\frac{d}{dx}\left(e^x\right)-e^x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

b. $f(x)=10e^{x^2+4}$

$$\frac{d}{dx}\left(10\frac{d}{dx}\left(x^2+4\right)\right)=20xe^{x^2+4}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=20e^{x+1}$ R. $20e^{x+1}$
2. $f(x)=xe^{x^2}$ R. $e^{x^2}(2x^2+1)$

3 Derivada del logaritmo de base a de una función u.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\log_a u)=\frac{\log_a e}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Ejemplos:

a. $f(x)=\log\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\log e}{\frac{x}{x+1}}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)=\frac{\log e}{\cancel{x}\ x+1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)=\frac{\log e}{x(x+1)}$$

b. $f(x)=\sqrt{\log x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\log x}\right)=\frac{\log e}{2x\sqrt{\log x}}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=\left(\log x^2\right)^3$ R. $\dfrac{6(\log x^2)^2(\log e)}{x}$

2. $f(x)=x^2(\log x^3)^3$ R. $(9x)(\log x^3)^2(\log e)+(\log x^3)^3(2x)$

3.6 Regla de la cadena

Sea $y = f(u)$ una función de u y $u = g(x)$ una función de x. Entonces podemos escribir: $y = f[g(x)]$.

Qué representa a y cómo una función de x, denominada la función composición de f y g, y se denota por $(f \circ g)(x)$.

Las derivadas de funciones compuestas pueden calcularse mediante el teorema siguiente:

Si y es una función de u y u es una función de x entonces: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \bullet \dfrac{du}{dx}$

Ejemplo:

a. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ cuando $y = (x^2 + 1)^5$

Expresamos a y como la composición de dos funciones de la forma siguiente:

$$y = u^5 \qquad \text{donde} \qquad u = x^2 + 1$$

donde tendremos $\dfrac{dy}{du} = 5u^4$ y $\dfrac{du}{dx} = 2x$

Aplicando el teorema $\dfrac{dy}{dx} = 10x(x^2 + 1)^4$

Problemas propuestos:

1. Sea $y = \sqrt[3]{(4x^2 - 8x + 5)}$ R. $\dfrac{(8x - 8)}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 8x + 5)^2}}$

2. Sea $y = \left[\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}\right]^3$ R. $3\left[\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}\right]^2 \left[\dfrac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}\right]$

3.7. Derivadas de las funciones de orden superior

En ocasiones es necesario derivar una función una o más veces. Al resultado de dos o más derivadas en forma consecutiva de una función, se le conoce como derivada de orden superior y se representa de la siguiente forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad ; \quad f^n(x) \quad ; \quad y^n$$

Ejemplo:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x - 6$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

Las derivadas de orden superior, son también iguales a cero.

b. $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

Solución:

$$\frac{dt}{dy} = t(t^2 + 1)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2 t}{dy^2} = (t^2 + 1)^{-3/2}$$

$$\frac{d^3 t}{dy^3} = -3t(t^2 + 1)^{-5/2}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = e^{3x}$ Encontrar la primera y segunda derivada.
   R. $3e^{3x}$, $9e^{3x}$

2. $f(x) = \log\left(\frac{3}{x}\right)$ Encontrar la primera y segunda derivada.

   R. $-\frac{1}{x}\log e$; $\frac{1}{x^2}\log e$

3.8 Funciones crecientes y decrecientes

➢ Función creciente

Definición

Se dice que la función es creciente en un intervalo I, si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$. Si la primera derivada de f es positiva en todo un intervalo entonces la pendiente será positiva y f será una función creciente en el intervalo.

➢ Función decreciente

Definición

Se dice que la función es decreciente en un intervalo I, si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que f $(x_1) > f(x_2)$. Si la primera derivada de f es negativa en todo un intervalo entonces la pendiente será negativa y f será una función decreciente en el intervalo.

Ejemplos:

1.En $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

a. Función creciente.
b. Función decreciente.
c. La función no es creciente ni decreciente.

Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = 5x^2 - 20x + 3$$
$$f`(x) = 10x - 20$$

a. f será creciente cuando f`(x)>0 ó cuando:

$$10x - 20 > 0$$
$$10x > 20$$
$$x > 20/10$$
$$x > 2$$

b. f será decreciente cuando f`(x)<0 ó cuando:

$$10x - 20 < 0$$
$$10x < 20$$
$$x < 2$$

c. f no será creciente ni decreciente cuando f`(x) = 0 ó cuando:

$$10x - 20 = 0$$
$$10x = 20$$
$$x = 2$$

2. En $f(x) = 2x^2 + 10$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:
a) Función creciente.
b) Función decreciente.
c) La función no es creciente ni decreciente.

Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = 2x^2 + 10$$
$$f`(x) = 4x$$

a. f será creciente cuando f`(x)>0 ó cuando:

$$4x > 0$$
$$x > 0/4$$
$$x > 0$$

b. f será decreciente cuando f`(x)<0 ó cuando:

$$4x < 0$$
$$x < 0/4$$
$$x < 0$$

c. f no será creciente ni decreciente cuando f`(x) = 0 ó cuando:

$$4x = 0$$
$$x = 0$$

3. En $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

a) Función creciente.
b) Función decreciente.
c) La función no es creciente ni decreciente.

Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$$
$$f`(x) = 3x^2 + 12x$$
$$f`(x) = 3x(x+4)$$

a. f será creciente cuando f`(x)>0 y cuando f(x)< - 4:

$$3x > 0$$
$$x > 0$$
$$cuando:$$
$$x < -4$$

b. f será decreciente cuando - 4< f`(x) <0 ó cuando:

$$3x < 0$$
$$x < 0$$

$$cuando:$$
$$x > -4$$

c. f no será creciente ni decreciente cuando f`(x) = 0 y cuando f(x) = -4:

$$3x = 0$$
$$x = 0$$

$$x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

Problemas propuestos:

1. En $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

   a) Función creciente.
   b) Función decreciente.
   c) La función no es creciente ni decreciente.

   R. -α<f(x)<1 creciente, x =1 punto estacionario, 1<f(x)<2 decreciente, x=2 punto estacionario, 2<f(x)<+α, creciente.

2. En $f(x) = 3x^3$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

   a) Función creciente.
   b) Función decreciente.
   c) La función no es creciente ni decreciente.

R. Es creciente para valores positivos, es decreciente para valores negativos y es un punto estacionario en cero.

3.9 Valores máximos y mínimos de una función

- Valores máximos y mínimos utilizando el método de la primera derivada

Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos de una función.

1. Encontrar la primera derivada de la función y se factoriza hasta obtener los factores de primer grado.
2. Los factores encontrados en el punto anterior se igualan a cero (cada uno) y se resuelve la ecuación hasta obtener sus raíces, que vienen a ser los valores críticos de la variable o abscisa de un máximo o mínimo
3. Se realiza un cuadro en el que se toman como base los valores críticos de la variable, se le dan valores menores y mayores, pero vecinos para cada valor crítico de la variable, los cuales se sustituyen en la ecuación importante de la segunda operación, si el cambio de signo es de más (+) a menos (-) hay un máximo, pero si es de menos (-) a más (+) es un mínimo, si no hay cambio de signo entonces se tiene un punto estacionario.
4. Los valores críticos de la variable se sustituyen en la función, obteniéndose las ordenadas de los máximos y mínimos.

Los puntos anteriores son utilizados como un procedimiento para localizar los máximos y mínimos que ocurren en los valores de x para los cuales f(x) y f`(x) son continuas.

Ejemplo uno

1.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$$

$$f``(x) = 3x^2 - 12x$$

$$f``(x) = 3x(x-4)$$

2. Valores críticos

3x = 0 x - 4 = 0

x = 0 x = 4

3.

x	3x (x - 4)	
-1	(-)(-) = +	
0		Máximo
1	(+)(-) = -	
3	(+)(-) = -	
4		Mínimo
5	(+)(+) = +	

4.

a) Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 16$$
$$f(0) = 16$$

b) Ordenada del mínimo

$$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 16$$
$$f(4) = -16$$

5.

Punto del máximo P(0, 16)

Punto del mínimo P(4, -16)

Ejemplo dos

1.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$
$$f`(x) = 12x^3 - 12x^2 = x^2(x-1)$$

2.

Valores críticos

$x^2 = 0$ $\qquad$ $x - 1 = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 1$

3.

x	$x^2 (x - 1)$	
-1	(+)(-) = -	
0		Punto estacionario
1	No hay signo	
0	(+)(-) = -	
1		Mínimo
2	(+)(+) = +	

4.

a) Ordenada del máximo

$$f(0) = 3(0)^4 - 4(0)^3$$
$$f(0) = 0$$

b) Ordenada del mínimo

$$f(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3$$
$$f(1) = -1$$

5.

Punto estacionario P(0, 0)

Punto del mínimo P(1, -1)

Ejemplo tres

1.

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 5$$
$$f`(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$$

2.

Valores críticos

6 = 0 $\quad\quad$ $x^2 - 1 = 0$

$x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

3.

$\underline{x}$		$6(x^2 - 1)$	
	0	(-)	
1			Mínimo
	2	(+)	
	-2	(+)	
-1			Máximo
	0	(-)	

4.

a) Ordenada del mínimo

$$f(1) = 2(1)^3 - 6(1) + 5$$
$$f(1) = 1$$

b) Ordenada del máximo

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 5$$
$$f(-1) = 9$$

5.

Punto del máximo P(-1, 9)
Punto del mínimo P(1, 1)

Resumen

1. Si la función tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un valor x = a, para el que la primera derivada es continuo, entonces f \`(a) = 0, si sólo si.
2. Si f \`(a) = 0 no necesariamente debe de ser un máximo relativo o un mínimo relativo en x = a, puede ser un punto estacionario con tangencia horizontal, pero f(x) y f \`(x) son continuas en x = a entonces f \`(a) = 0.
3. Las condiciones necesarias para que exista un máximo o un mínimo son:

   a. f \`(a) = 0
      o bien
   b. f \`(a) no está definida

➢ Problemas propuestos:

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$ R. $P_{máx}$(-1,20) y $P_{mín}$(2,7)

2. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2$ R. $P_{máx}$(-1,14/3) y $P_{mín}$(3,2)

➢ Valores máximos y mínimos utilizando el método de la segunda derivada

La segunda derivada se emplea para determinar en donde una función tiene una concavidad hacia arriba o hacia abajo.

La segunda derivada f\`\`(a) es la pendiente de la gráfica de f\`(x) en el punto x = 0.

a) La segunda derivada f\`\`(a) de una función y = f(x) es positiva, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia arriba y f\`(x) es una función de x creciente en x = a.
b) La segunda derivada f\`\`(a) de una función y = f(x) es negativa, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia abajo (convexa) y f\`(x) es una función de x decreciente en x = a.

Si una función f(x) en un valor x = a para el cual f(x) y f\`(x) son continuas.

a) Geométricamente si f\`(a) = 0 y f(x) es cóncava hacia abajo en x = a, entonces f(x) tiene un máximo en a.
b) Geométricamente si f\`(a) = 0 y f(x) es cóncava hacia arriba en x = a, entonces f(x) tiene un mínimo en a.

Si f(x) y f\`(x) son continuas en x = a y f\`(a) = 0, entonces:

Mínimo	Máximo	La prueba no es aplicable
En x = a, f\`\`(a) > 0	En x = a, f\`\`(a) < 0	F\`\`(a) = 0

Criterio de la segunda derivada para calcular máximos y mínimos.

1. Obtener la primera derivada y encontrar los factores de primer orden.
2. Igualar a cero los factores de primer orden y obtener los valores críticos.
3. Obtener la segunda derivada y sustituir en ellos los valores críticos de la variable y ver si el valor numérico obtenido es positivo (x > 0) existe un mínimo, si el valor es negativo (x < 0) existe un máximo, cuando el valor obtenido es cero (x = 0), el criterio no se aplica y se tiene que regresar al criterio de la primera derivada.

Ejemplos:

a. Encontrar los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 12$$
$$f`(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f`(x) = 6(x^2 - x - 2)$$
$$f`(x) = 6(x+1)(x-2)$$

2.

x + 1 = 0   x - 2 = 0   6 = 0

x = -1   x = 2

3.

$$f`(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f``(x) = 12x - 6$$

Para x_1 = -1

$f``(x) = 12(-1) - 6 = -18$ Existe un máximo.

Para x_2= 2

$f``(x) = 12(2) - 6 = 18$ Existe un mínimo

Es cóncava hacia abajo en x = -1.
Es cóncava hacia arriba en x = 2.

b. Determinar la concavidad de la función en el punto x = -2.

1.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$
$$f`(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

2.

$$f`(x) = 3x^2 - 4x + 1$$
$$f``(x) = 6x - 4$$

Para x_1 = -2

$f``(x) = 6(-2) - 4 = -16$

$f``(-2) < 0$ Existe un máximo.

Para x_2= 3

$f``(x) = 6(3) - 4 = 14$ Existe un mínimo

Es cóncava hacia abajo en x = -2.
Es cóncava hacia arriba en x = 3.

c. Obtener los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.

$$f(x) = x^4$$
$$f`(x) = 4x^3$$

2.

$4x^3 = 0$

$x = 0$

3.

$$f`(x) = 4x^3$$
$$f``(x) = 12x^2$$

Para $x_1 = 0$

$f``(x) = 12(0) = 0$ No existe máximo o mínimo, la prueba no es aplicable.

a) Valor crítico

si $x < 0$; $f`(x) < 0$
si $x > 0$; $f`(x) > 0$
Entonces existe un mínimo

x	$4x^3$	
-1	(-)-	
0		Mínimo
1	(+)	

b). Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^4$$
$$f(0) = 0$$

c) El mínimo se encuentra en el punto p(0, 0) y la curva es cóncava hacia arriba en x = 0.

- Problemas propuestos

1. Determinar la concavidad de la función $f(x)=3x^2-2x+1$, por el método de la segunda derivada.

   R. P(1/3, 2/3), cóncava hacia arriba.

2. Determinar la concavidad de la función $f(x)=-4x^3+3x^2+18x$, por el método de la segunda derivada.

   R. P(3/2, 20.25), cóncava hacia arriba;
   P(-1, -11) cóncava hacia abajo.

3. Determinar la concavidad de la función $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+6x-20$, por el método de la segunda derivada.

   R. P(2, -14), cóncava hacia abajo.

- Razón de cambio promedio

Definición

Suponga que y es una función de x, $y=f(x)$. Correspondiendo a un cambio de x a $x+\Delta x$, la variable (y) cambia a una cantidad $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. Así el cociente de diferencias es:

$$\frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ésta representa la razón de cambio promedio de y con respecto a x.

- Razón instantánea

Conforme Δx tienda a cero, la razón de cambio promedio tiende a lo que intuitivamente se llama razón instantánea de cambio de (y) con respecto a x, y el cociente de diferencias tiende a la derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, por lo tanto la razón instantánea de cambio de (y) con respecto a x es precisamente la derivada $\frac{dy}{dx}$, o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

3.10 Problemas de Aplicación

La derivada de una función es una herramienta que permite medir la razón de cambio de una cantidad con respecto a otra. Algunas aplicaciones son en el área económico-administrativo como es el caso del análisis marginal (utilidad, ingreso, costo).

Ejemplo:

1.

Un estudio de productividad sobre el turno matinal en una fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá montado $F(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ aparatos de sonido digitales x horas después.

a. Determine una fórmula para el ritmo al que el trabajador estará montando aparatos de sonido digitales después de x horas.

$$\frac{dF}{dx} = -3x^2 + 12x + 15$$

b. ¿A qué ritmo estará montando los aparatos de sonido el trabajador a las 9:00?

$$\frac{dF}{dx} = -3(1)^2 + 12(1) + 15 = 24 \quad \textit{aparatos de sonido digitales} \big/ \textit{hora}$$

c. ¿Cuántos aparatos de sonido montará realmente el trabajador entre 9:00 y 10:00 am?

$\Delta F(x) = F(x_2) - F(x_1) = 26$ aparatos de sonido digitales.

La gerencia de la compañía de llantas "Azteca", ha determinado que la función de demanda semanal de sus llantas Gran Azteca, está dada por: P = f(x) = 144 - x^2, donde P se mide en pesos y x en unidades de producción.

a. Encontrar la razón promedio de cambio en el precio unitario de una llanta.

Respuesta: $\frac{dp}{dx} = -2x - h$

La razón del cambio instantáneo del precio unitario de una llanta cuando la cantidad demandada es x unidades.

Respuesta: $\frac{dp}{dx} = -2x$

APLICACIONES CON LA PRIMERA DERIVADA

COSTO MARGINAL

Se define como el cambio en el costo total C(x) debido al incremento de una unidad en la producción y se escribe como:

$$C'(x) = \frac{dc}{dx}$$

INGRESO MARGINAL

El ingreso marginal es el cambio en el ingreso total R(x) por un incremento de una unidad en la demanda y se representa por:

$$R'(x) = \frac{dr}{dx}$$

COSTO PROMEDIO MARGINAL

Al costo total dividido entre la cantidad producida que es la razón C (x)/x, y está representado el costo promedio por unidad producida.

A la derivada de la razón C (x)/x, con respecto a x se le llama costo promedio marginal y se representa como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right)=\frac{1}{x}\left[C'(x)-\frac{C(x)}{x}\right]$$

La expresión anterior indica el costo promedio por artículo en la cantidad total producida.

Ejemplos:

1. El costo total de producir un artículo (x) está dado por:
C(x)= $0.25x^2$ +40x+100 pesos, el precio de venta de las x unidades está dado por la ecuación p(x)= 120-0.5x pesos por unidad.

a) Encontrar el costo marginal
b) Calcular el ingreso marginal
c) ¿Cuál es el costo marginal de la venta de 14 unidades?
d) ¿De cuánto es el ingreso marginal que se obtiene de la venta de 14 unidades?

Solución:

a) La ecuación del costo total es:

$$C(x)= 0.25x^2+40x+100$$

La primera derivada nos da el costo marginal

$$C'(x)= 0.5x+40$$

b) El precio de venta está dado por la ecuación p(x)=120-0.5x, al venderse x unidades se expresa como:

$$R(x) = x[p(x)] \qquad R(x) = x(120 - 0.5x)$$

Al encontrar la primera derivada obtenemos el ingreso marginal

R'(x)= 120-x

c) De la ecuación de costo marginal del inciso a, se obtiene:

C' (14) = 0.5 (14) + 40 = 47 pesos

d) El ingreso marginal de la venta de 14 unidades

$$R'(x) = 120 - x$$
$$R'(14) = 120 - 14$$
$$R(14) = 106$$

El ingreso obtenido al vender 14 unidades es 106 pesos.

2. Encontrar el costo promedio marginal de la siguiente ecuación; cuando x = 150.

$$C(x) = 0.003x^3 - 0.5x^2 + 20x + 1500$$
$$C'(x) = 0.009x^2 - 0.5x + 20$$
$$C'(150) = 147.5$$
$$C(150) = 3375$$

COSTO PROMEDIO MARGINAL

$$\frac{1}{x}\left[C`(x) - \frac{C(x)}{x}\right] = \frac{1}{150}\left[147.5 - \frac{3375}{150}\right] = 0.8$$

Así, cuando x = 150, el costo promedio por unidad aumenta en 0.8 por cada unidad adicional producida.

Utilidad marginal[13]

2. Un fabricante de calzado produce zapatos para hombres y mujeres. Si se producen x zapatos para caballeros, y zapatos para dama a la semana, entonces la ecuación de transformación del producto es de $2x^2 + y^2 = 25$. la utilidad es de $ 20 por cada par de zapatos.

Calcular la utilidad marginal con respecto a x, cuando x toma el valor de 2.

Solución:

La ecuación de utilidad semanal u en miles de pesos es:

$$u = 20x + 20y$$

la ecuación de transformación del producto se expresa como:

$$2x^2 + y^2 = 25$$
$$y = \sqrt{25 - 2x^2}$$

Se expresa u en términos de x como:

$$u = 20x + 20\sqrt{25 - 2x^2}$$

La utilidad marginal con respecto a x no es otra cosa que la derivada du / dx, ésta mide el incremento en la utilidad por unidad de incremento en x cuando x es la producción de calzado de caballero, este incremento es muy pequeño.

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[20x + 20(25 - 2x)^{1/2}\right]$$
$$\frac{du}{dx} = 20 + 20\frac{d}{dx}\left(25 - 2x^2\right)^{1/2} \quad ------(1)$$

[13] Problemas con modificaciones del libro de Jagdish C. Ayra/Robin W. Lander, *Matemáticas Aplicadas a la Administración y la Economía,* México, Prentice Hall, Tercera Edición, 1992, págs. 545, 546 y 547.

Es necesario utilizar la regla de la cadena para derivar el segundo término.

$$\frac{du}{dx} = (25-2x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(25-2x^2)^{\frac{-1}{2}} \frac{d}{dx}(25-2x^2)$$
$$\frac{du}{dx}(25-2x^2)^{\frac{1}{2}} = -2x(25-2x^2)^{-1/2}$$

Se sustituye este resultado en la expresión (1).

$$\frac{du}{dx} = 20 + 20\frac{d}{dx}(25-2x^2)^{1/2}$$
$$\frac{du}{dx} = 20 + 20\left[-2x(25-2x^2)^{\frac{-1}{2}}\right]$$
$$\frac{du}{dx} = 20 - 40x\left(25-2x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

Si x =2, el valor de y es:

$$y = \sqrt{25-2x^2} = \sqrt{25-2(4)} = \sqrt{17} = 4.1$$

La empresa produce 2000 pares de zapatos para caballero y 4100 pares de zapatos para dama por semana.

La utilidad semanal es:

$$u = 20(x+y) = 20(2+4.1) = 122$$

La utilidad marginal es:

$$\frac{du}{dx} = 20 - 40(2)[25 - 2(4)]^{-1/2}$$
$$\frac{du}{dx} = 0.597$$

Un incremento de miles de pares de zapatos para caballero producen un incremento aproximado de 0.6 miles de pesos en la utilidad.

3. La función del costo es c(x) = 3500+ 25x y la ecuación de demanda de un artículo es: p + 0.3x = 86

a) Encontrar la ecuación de la utilidad marginal
b) Calcular la utilidad marginal cuando se producen y venden 50 unidades.

a) La función de ingreso es R(x) = x p

$$R(x) = x(86 - 0.3x)$$
$$R(x) = 86x - 0.3x^2$$

De la ecuación de utilidad

$$U_{(x)} = R(x) - C(x)$$
$$U(x) = 86x - 3x^2 - (3500 + 25x)$$
$$U(x) = 61x - 0.3x^2 - 3500$$

La utilidad marginal es:

$$U'_{(x)} = 61 - 0.6x$$

b) Cuando se producen y venden 50 artículos

$$U`(x) = 61 - 0.6x$$
$$U'(50) = 61 - 0.6x$$
$$U`(50) = 31$$

El resultado indica que cuando se producen 50 unidades hay una utilidad de $31 por unidad adicional.

Costo marginal

4. Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que a fin de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por: $C = 200 + 0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C = 200 + 0.03(100)^2 = 500$. El costo promedio al producir 100 artículos es 500/100 = \$5.

$$-2x(25-2x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\begin{aligned} C + \Delta C &= 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 \\ &= 200 + 0.03\,[10,000 + 200\,\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 200 + 300 + 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)^2 \\ &= 500 + 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es:

$$\Delta C = (C + \Delta C) - C = 500 + 6\Delta\, x + 0.03\,(\Delta x)^2 - 500$$
$$\Delta C = 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)^2$$
$$\Delta C = \Delta x\,(\,6 + 0.3\,\Delta x\,)$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extras es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\,\Delta x$$

Si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que el $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a 6 + 0.03 (50) = \$7.50 por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a \$6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el caso anterior:

$$\text{Costo marginal} = \text{lím}\ \frac{\Delta c}{} = \text{lím}\ (6 + 0.03\,\Delta x) = 6$$

Δx→0 Δx Δx→0

Regla de la cadena

5. Un importador de café mexicano estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p)=\frac{4.374}{p^2}$ kilogramos de café por semana cuando el precio sea de p pesos por kilogramos.

Se estima que dentro de t semanas, el precio del café mexicano será de $P(t)=0.02t^2+0.1t+6.0$ pesos el kilogramo. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de café dentro de 10 semanas?

La demanda, ¿estará creciendo o decreciendo?

$$\frac{dD}{dp}=-\frac{8.748}{p^3} \qquad \frac{dp}{dt}=0.04t+0.1$$

donde $$\frac{dD}{dt}=\frac{dD}{dp}*\frac{dp}{dt}=\frac{-8.748}{\left(0.02t^2+0.1t+6\right)^3}$$

Cuando t = 10 semanas $\boldsymbol{\frac{dD}{dt}=-0.012}$

Por lo tanto la demanda está decreciendo a un ritmo de 0.012 kilogramos por semana.

Problemas propuestos:

1. Se estima que dentro de t años, la población de una cierta comunidad será de $P(t)=20-\frac{6}{t+1}$ en miles de habitantes. Un estudio ambiental indica que el nivel medio diario de contaminantes en el aire será de $C(p)=0.5\sqrt{p^2+p+58}$ en porcentaje.

a) Encuentre el ritmo al que el contaminante está cambiando con respecto al tiempo dentro de 2 años.

R. $\frac{dc}{dt}=0.31\%$

2. La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $P = 400 - 2q$ y que la función de costo es $C = 0.2q^2 + 4q + 400$ donde q es el número de unidades de producción. Y P como C esta expresado en pesos.

a) Determine el nivel de producción en donde se maximizan las utilidades.
b) Determine la utilidad máxima
c) Determine el precio al cual ocurren las utilidades máximas.

R. a) $q = 90.0$ b) $u = \$17420$ c) $P = \$220$

3. Suponga que $P = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.

a) Determine la tasa de cambio de P con respecto a q.
b) Determine la función de ingreso marginal.

R. a) $\dfrac{dP}{dq} = -\dfrac{q}{\sqrt{q^2 + 20}}$ b) $\dfrac{d\,\mathrm{Im}g}{dq} = 100 - \dfrac{q^2}{\sqrt{q^2 + 20}} - \sqrt{q^2 + 20}$

Tema 4

CÁLCULO INTEGRAL

OBJETIVOS

- Entender el concepto de integral
- Distinguir entre integral indefinida y definida
- Calcular la integral indefinida
- Calcular la integral definida

CONTENIDO

4.1 Integral
4.2 Integral indefinida
4.3 Integral definida
4.4 Problemas de aplicación
4.5 Problemas propuestos

Empecemos primero por plantear el concepto de integral en forma general y más adelante se estudiará a la integral indefinida y definida.

La integral de una función f se denota como:

$$\int f(x)\, dx$$

Donde:

f(x)	función a integrar o integrando,
dx	diferencial de la variable x,
$\int$	signo de integración.

4.1 Integral

La integral tiene muchas interpretaciones y aplicaciones, se mencionan algunas de éstas:

Antiderivada
La integral es la operación contraria a derivar y se le llama antiderivada.

Ejemplo:

1. La derivada de la función x es 1, dx (x) = 1

Por lo tanto la antiderivada o integral de 1 es:

$$\int 1\, dx = x + C$$

En donde "C" es una constante de integración que puede tomar cualquier valor, así decimos que:

$F(x) = x + 3$
$F(x) = x + 2$
$F(x) = x + 1$
$F(x) = x + 0$
$F(x) = x - 1$

Todos los casos anteriores son antiderivadas de la función f(x) =1, entonces se puede afirmar que una función f es una antiderivada de f en un intervalo, si:

$$F'(x) = f(x)$$

Las funciones F(x) = x + C representan una familia de rectas, todas ellas con pendiente igual a 1.

2. $2x = x^2 + C$

Al derivar la función $f(x) = x^2$, obtenemos como resultado 2x.

Hasta aquí podemos concluir que si conocemos la derivada de una función conocemos su antiderivada o integral también.

4.2 Integral indefinida

La integral indefinida de cualquier función f con respecto a x es una antiderivada indefinida (arbitraria) de f, y se denota como: $\int f(x)dx$.

Se afirma que todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante.

Formalicemos lo hasta aquí visto.

La antiderivada general de f(x) es: F(x) + C

por lo tanto:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Ejemplo:

a) $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

b) $\int 3x^2 dx = 3\int x^3 dx = 3\left[\frac{x^3}{3} + C\right] = x^3 + C$

c) $\int (1 - x)dx = \int dx - \int xdx = x - \frac{x^2}{2} + C.$

4.3 Integral definida

La integral definida de una función f(x) entre x = a y x = b se denota como:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Se puede interpretar como el área de la región limitada por la gráfica y = f(x) y las rectas x = a, x = b y el eje "x".
Los valores a y b reciben el nombre de límite inferior y superior de integración respectivamente.

Una definición más precisa es mencionar que el área bajo una gráfica de una función continua, puede expresarse como la integral definida de F(x) sobre el intervalo de a hasta b escrito matemáticamente como:

$$\int_a^b F(x)dx = \underset{x \to \infty}{lím} \sum_{i=1}^{n} F(x)\Delta xi$$

Al contrario de la integral indefinida que es un conjunto de funciones que contiene todas las antiderivadas de F(x), la integral definida es un número real que puede ser evaluado empleando el "teorema fundamental del cálculo" que establece que el valor numérico de la integral definida de una función continua F(x) sobre el intervalo de a hasta b, está dado por la antiderivada F(x)+C evaluada en el límite superior de integración b, menos la misma antiderivada F(x)+C evaluada en el límite inferior de integración a, con C común a ambos, la constante de integración se elimina en la sustracción matemática expresada.
Donde el símbolo $\left|_a^b\right.$, $\left.\right]_a^b$, o $[....]_a^b$ indican que los límites de b y a deben sustituirse sucesivamente para x.

Ejemplo:

Calcular $\int_0^3 (x-1)dx$

a. Primero el cálculo del área.

b. El concepto de antiderivada y la pregunta que plantea es ¿qué función al derivarla da como resultado (x – 1)?

y se obtiene que:

$$\int_0^3 (x-1)dx = \int_0^3 xdx - \int_0^3 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{2}(3)^2 - (3)\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - 0\right]$$

el resultado es: $\int_0^3 (x-1)dx = \frac{3}{2}$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Algunas de las propiedades de la integral definida.

1. Si tenemos una función que se está multiplicando por una constante; podemos colocar a la constante fuera de la integral.

   En forma general:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

   Ejemplo:

$$\int_2^4 6x^3dx = 6\int_2^4 x^3dx = 6\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_2^4 = 6\left[\tfrac{1}{4}(4)^4 - 1/4(2)^4\right] = 360$$

2. Si k es cualquier constante, entonces:

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

Ejemplo:

$$\int_{2}^{4} 2xdx = (2x\ )\Big|_{2}^{6} = 2(6-2) = 8$$

3. Si estamos calculando la integral de la suma o resta de 2 funciones:

$$\int_{a}^{b} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)$$

Ejemplo:

$$\int_{0}^{3} (x^2 + x^3)dx = \int_{0}^{3} x^2 dx + \int_{0}^{3} x^3 dx = 1/3(x^3)\ \Big|_{0}^{3} + 1/4(x^4)\ \Big|_{0}^{3}$$
$$= 1/3[(3)^3 - (0)^3] + 1/4[(3)^4 - (0)^4] = 9 + 20.25 = 29.25$$

3 La inversa del orden de los límites de integración cambia el signo de la integración.

$$\int_{a}^{b} F(x)dx = -\int_{a}^{b} F(x)dx$$

4 Sí el límite superior de integraciones es igual al límite inferior de integración, el valor de la integración definida es cero.

$$\int_{a}^{b} F(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

5 La integral definida puede expresarse como la suma de subintegrales.

$$\int_{a}^{c} F(x)dx = \int_{a}^{b} F(x)dx + \int_{b}^{c} F(x)dx \qquad a \le b \le c$$

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

1. $\int dx = x + C$

2. $\int kdx = kx + C$

3. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

6. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{2}dx = Ln|x| + C$ x ≠ 0

7. $\int e^x dx = e^x + C$

PROBLEMAS DE INTEGRALES INDEFINIDAS

1. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4x^4} + C$

3. $\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

4. $\int x^3\sqrt{x}dx = \int x^3 x^{1/2}dx = \int x^{7/2}dx = \frac{x^{7/2+1}}{7/2+1} + C = \frac{2}{9}x^{9/2} + C$

5. $\int x(x + x^5)dx = \int (x^2 + x^6)dx = \int x^2dx + \int x^6dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7 + C$

6. $\int (2 + y^2)^2 dx = \int (4 + 4y^2 + y^4)dy = 4\int dy + 4\int y^2dy + \int y^4dy = 4y + \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} + C$

7. $\int\left(3x^5+4x^{3/2}-2x^{-1/2}\right)dx=3\int x^5dx+4\int x^{3/2}dx-2\int x^{-1/2}dx=$

$$=\frac{3x^6}{6}+\frac{4x^{5/2}}{5/2}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C\ =\frac{1}{2}x^6+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C$$

Problemas de INTEGRALES DEFINIDAS

a) $\int_2^4 3x^2dx=3\int_2^4 x^2dx=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4=(4)^3-(2)^3=56$

b) $\int_4^{36}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_4^{36}x^{\frac{-1}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_4^{36}=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^{36}$

$=2(36)^{\frac{1}{2}}-2(4)^{\frac{1}{2}}$

=12 – 4 = 8

c) $\int_1^5 3x^{-1}dx=3\int_1^5 x^{-1}dx=3[\ln x]_1^5=3\ln 5-3(\ln 1)$

=3(ln 5) = 4.82

d) $\int_0^1 e^{\frac{t}{2}}dt=\left[2e^{t/2}\right]_0^1=2e^{\frac{1}{2}}-2e^0=2(e^{\frac{1}{2}}-1)$

- Problemas propuestos

1) $\int 15x^{-1}dx$ R. $15\ln lxl+C$

2) $\int 25e^{-5x}dx$ R. $-5e^{-5x}+C$

3) $\int\frac{2}{x}dx$ R. Lnx^2+C

4) $\int(20x^4-8x^3)dx$ R. $4x^5-2x^4+C$

5) $\int_{2}^{4}(9x^2+6)dx$ R. 180

6) $\int_{1}^{2}-8x^{-3}dx$ R. –3

7) $\int_{1}^{9}12\sqrt{x}dx$ R. 208

8) $\int_{0}^{1}12e^{-4t}dt$ R. 2.94

4.5 Problemas de aplicación

1. La gerencia de la compañía de equipo para oficina determinó que la función de ingresos marginales diarios asociados con la producción y venta de su sacapuntas de baterías está dada por:

   R´(x) = -0.0006x + 6

   Donde x denota las unidades producidas y R´(x) se mide en dólares por unidad.

   a) Determinar la función de ingresos R(x) asociada con la producción y venta de estos sacapuntas
   b) ¿Cuál es la ecuación de demanda que relaciona el precio unitario al mayoreo con estos sacapuntas con la cantidad demandada?

Solución:

a) La función de ingresos R se encuentra integrando la función de ingresos marginales R´(x). Así,

$$R(x) = \int R`(x)dx = \int (-0.0006x + 6)dx = -0.0006 \int x\, dx + 6\int dx$$
$$= -0.0003x^2 + 6x + C$$

para determinar el valor de la constante "C", hemos de darnos cuenta que los ingresos totales de la empresa son cero cuando el nivel de producción y ventas son nulos; es decir, R(0) = 0. Ésta condición indica que:

$R(0) = -0.0003\,(0)^2 + 6(0) + C = 0$

Por lo tanto: $C = 0$

Así la función de ingresos requerida está dada por:

$R(x) = -0.0003\,x^2 + 6x$

b) Sea "p" el precio unitario al mayoreo de los sacapuntas, entonces:

ingresos $\longrightarrow R\,(x) = p\,x$

$\nearrow \quad \nwarrow$

precio número de sacapuntas

Despejando:

$$p = \frac{R(x)}{x} = \frac{-0.0003x^2 + 6x}{x} = -0.0003x + 6$$

La ecuación de demanda es:

$p = -0.0003x + 6$

2. Las tasas de costos e ingresos de cierta operación minera están dados por:

$$C'(t) = 5 + 2t^{\frac{2}{3}} \qquad \text{y} \qquad R'(t) = 17 - t^{\frac{2}{3}}$$

en donde C y R se miden en millones de pesos y t en años, determine:

a) ¿Qué tanto deberá prolongarse la operación? y
b) Encuentre la utilidad total que puede obtenerse durante este periodo.

Solución:

a) El instante optimo t, que dará como resultado la utilidad máxima es el instante en que el costo y el ingreso son iguales es decir:

$C'(t)=R'(t)$

$$5+2t^{\frac{2}{3}}=17-t^{\frac{2}{3}}$$

$$3t^{\frac{2}{3}}=17-5$$

$$3t^{\frac{2}{3}}=12$$

$$t^{\frac{2}{3}}=\frac{12}{3}$$

$$t^{\frac{2}{3}}=4$$

$$t=4^{\frac{3}{2}}=8$$

Por lo tanto, la operación deberá mantenerse por t = 8 años

b) La utilidad que puede obtenerse durante este periodo de 8 años está dada por:

Utilidad = $\int_0^8 \left[R'(t)-C'(t)\right]dt$

$$=\int_0^8 \left[17-t^{\frac{2}{3}}-(5+2t^{\frac{2}{3}})\right]dt$$

$$=\int_0^8 \left[17-t^{\frac{2}{3}}-5-2t^{\frac{2}{3}}\right]dt$$

$$=\int_0^8 (12-3t^{\frac{2}{3}})dt$$

$$=12t-\left.\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right|_0^8$$

$$=12t-\left.\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}\right|_0^8$$

$$=12(8)-\frac{9}{5}(8)^{\frac{5}{3}}$$

$=96-57.6=38.4$ millones de pesos

3. La función de costo marginal de un fabricante está dado por la $\frac{dc}{dq} = 0.8q + 4$. Si la producción está altamente igual a q = 90 unidades por semana ¿qué tanto costaría incrementar la producción a 110 unidades por semana?

   La tasa de cambio del costo es $\frac{dc}{dq}$.

   $$C(110) - C(90) = \int_{90}^{110} \frac{dc}{dq} dq = \int_{90}^{110} (0.8q + 4) dq$$

   $$= 0.8\int_{90}^{110} q dq + 4\int_{90}^{110} dq = \frac{0.8q^2}{2} + 4q\Big]_{90}^{110} = 5280 - 3600 = 1680$$

   El costo para aumentar la producción de 90 a 110 unidades es $1680.

4. El valor actual de un flujo continuo de ingresos de $5000 al año durante 10 años al 4% compuesto continuamente está dado por:

   $$\int_0^{10} 5000 e^{-0.04t} dt$$

   a) Calcule el valor actual

   $$\int_0^{10} 5000 e^{-0.04t} dt = 5000\int_0^{10} e^{-0.04t} dt$$

   $$= 5000\left[-\frac{e^{-0.04t}}{0.04} \right]_0^{10} = -83790.0 + 125000$$

   valor actual = $ 41210

En estadística, una función de densidad de probabilidad f de una variable x, en donde x toma todos los valores del intervalo $[a,b]$ tiene las siguientes propiedades:

1. $F(x) \geq o$ 2. $\int_a^b F(x) dx = 1$ 3. $P(c \leq x \leq d) = \int_c^d F(x) dx$

Ejemplo:

5. Suponga que y tiene la función de densidad F(y) = C y en el intervalo $0 \leq y \leq 2$.

Encuentre el valor de la constante C que hace de F(y) una función de densidad de probabilidad.

$$F(y) = \int_0^2 Cydy = 1 \qquad C\int_0^2 ydy = \left.\frac{Cy^2}{2}\right|_0^2 = 1$$

2C=1 ∴ C = $\frac{1}{2}$

a) Encuentre la probabilidad de $P(1 \leq y \leq 2)$:

$$\text{P}\,(1 \leq y \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{2} ydy = \frac{1}{2}\int_1^2 ydy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2$$

$$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(1 \leq y \leq 2) = \frac{3}{4}$$

6. El tiempo requerido por un grupo de estudiantes de la Facultad de Contaduría para presentar un examen de 1 hora, es una variable aleatoria continua con una función de densidad dada por $F(y) = cy^2 + y$ que se comporta en el intervalo de $0 \leq y \leq 1$.

a) Determinar el valor de C.

$$F(y) = \int_0^1 \left[Cy^2 + y\right] dy = 1 \qquad \left[\frac{cy^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{C}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

$$C = \frac{3}{2}$$

b) Calcular la probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.

$$P(o \leq y \leq 0.5) = \int_0^{0.5} \left[\frac{3}{2} y^2 + y\right] dy = \left[\frac{3}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.1875$$

4.6 Problemas propuestos[14]

1. La función de costo marginal de un fabricante es $\frac{dc}{dq} = 0.2q + 3$. Si el costo está en pesos, determine el costo implicado en un aumento de la producción de 60 a 70 unidades. R. $160

2. La función de ingresos marginal de un fabricante es $\frac{dr}{dq} = 1000 / \sqrt{100q}$. Si r está en pesos, obtenga el cambio que se produce en los ingresos totales del fabricante si se aumenta la producción de 400 a 900 unidades. R. $2000

3. Calcule la función de demanda de $\frac{dr}{dq} = \frac{200}{(q+2)^2}$, donde $\frac{dr}{dq}$ función de ingreso marginal. R. $P = \frac{100}{(q+2)}$

4. Suponga que $F(x) = \frac{x}{8}$, en donde $0 \le x \le y$. Si F es una función de densidad obtenga:

a) $P(0 \le x \le 1)$,

b) $P(2 \le x \le y)$ R. a) $\frac{1}{16}$, b) $\frac{3}{4}$

5. Suponga que $F(x) = \frac{1}{x}$, en donde $e \le x \le e^2$. Si F es una función de densidad, encuentre $P(3 \le x \le 5)$.

R. $\ln\frac{5}{3}$

[14] Tomado con modificaciones del libro de Ernest F. Hacusseler. Jr/Richard S. Paul, *Matemáticas para Administración y Economía*, México, Editorial Iberoamerica, 1998.

BIBLIOGRAFÍA

1. Adalid D. C. Rodríguez F. J. *Álgebra Básica Soluciones con el Paquete Matemáticas,* México, UAM-X, 2001.
2. Allen, R. A. *Álgebra Elemental,* cuarta edición, México, Prentice Hall, 1998.
3. Ayra J. y R. Lardner, *Matemáticas Aplicadas a la Administración y la Economía,* México, Prentice Hall, Segunda Edición, 1985.
4. Budnick F. *Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales,* Mc Graw Hill, Tercera Edición, 1990.
5. Earl W, S. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica,* México, Editorial Iberoamérica Segunda Edición, 1998.
6. Ernest F.H. Jr. Richard S. *Matemáticas para Administración y Economía,* México, Editorial Iberoamérica, Segunda Edición, 1992.
7. Eslava Ma. E. E., Velasco J. R. Q. *Introducción a las Matemáticas Universitarias,* Colombia, Mc Graw Hill, 1997.
8. Goban, A. *Álgebra Elemental,* Editorial Iberoamérica, México ,1990.
9. Kleiman A., Elena K. De Kleiman, *Conjuntos Aplicaciones Matemáticas a la Administración,* Biblioteca Didáctica de Matemáticas, México, Noriega Limusa, 1991.
10. Jagdish C. A./Robin W. L., *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía,* México, Prentice Hall, Tercera Edición, 1992.
11. Narro R. Ana Elena (coord.). *Fundamentos de Álgebra,* UAM-X, México, 1998.
12. *National Council of Teachers of Mathematics, Conjuntos 1, Temas de Matemáticas,* Trillas, Séptima Edición, 1973.
13. Rees, P. K., F. W. Sparks y Ch. S. Rees. *Álgebra,* , Mc Graw Hill, décima edición.
14. Rendón A.T., Rodríguez J. F., A.A. Morales. *Introducción al Álgebra Lineal y de Matrices Aplicaciones con Excel,* México, UAM-X, 1998.
15. Rendón A.T., Rodríguez J. F., Morales A. A., Haik O. D., *Matrices Utilizando Excel,* México, UAM-X, 2000.
16. Weber J. *Matemáticas para Administración y Economía,* México, Harla, 1984.
17. William, L. P. *Álgebra Lineal con Aplicaciones* México, Mc Graw Hill, 1990.